

# VELOCITÀ LIMITE, CAUSALITÀ E TEST DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA

Nota del m.e. GIOVANNI MARIA PROSPERI (\*)

(Adunanza del 25 ottobre 2012)

SUNTO. – Prendendo spunto dall’annuncio, poi rientrato, della collaborazione OPERA dei Laboratori del Gran Sasso dell’osservazione di neutrini superluminali, si richiamano brevemente alcuni principi base della Teoria della Relatività e si discutono alcune conferme molto stringenti della teoria che vengono dalla mancate osservazioni di fenomeni tipo effetto Cherenkov e indirettamente dagli stessi risultati di OPERA.

\*\*\*

ABSTRACT. – With reference to the claim, subsequently withdrawn, by the “OPERA” collaboration of “National Gran Sasso Laboratories” of the observation of superluminal neutrinos, I briefly recall some basic principles of Relativity Theory and discuss some very stringent positive tests that come from the lack of observation of some effect of the type of Cherenkov effect and indirectly from the OPERA results themselves as stressed by some authors.

## 1. INTRODUZIONE

Nel settembre del 2011 l’equipe dell’esperimento OPERA, presso i laboratori Laboratori Nazionali del Gran Sasso, sconvolse un po’

---

(\*) Dipartimento di Fisica dell’Università di Milano, Istituto Lombardo, Accademia di Scienze e Lettere, Milan, Italy.  
E-mail: Giovanni.Prosperti@mi.infn.it

l'ambiente dei fisici con l'annuncio sensazionale di avere osservato neutrini propagantisi con velocità superiore a quella della luce [1].

L'esperimento coinvolgeva circa duecento fisici appartenenti ad una quarantina di istituzioni internazionali diverse. Il suo scopo principale era lo studio delle oscillazioni di neutrini. La collaborazione aveva realizzato un rivelatore di neutrini in grado di distinguere i tre diversi tipi di neutrini,  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$  (neutrini-e, neutrino- $\mu$ , neutrino- $\tau$ ), disposto in una delle grandi hall dei laboratori sotterranei del gran Sasso, sulla linea di un fascio proveniente dal CERN di Ginevra. Si tratta di un fascio di  $\nu_\mu$  prodotto dal supersincrotrone a protoni (SPS) del CERN. Un breve impulso di protoni, di 400 GeV di energia<sup>1</sup> e della durata di circa 10,5  $\mu$ s, viene estratto dalla macchina e proiettato entro un cilindro di grafite, dove per collisione con i nuclei di carbonio produce un corrispondente impulso di mesoni  $\pi^+$ . Queste particelle sono successivamente indirizzate verso un tunnel a vuoto di circa 1000 metri di lunghezza diretto verso i laboratori del Gran Sasso lungo il quale decadono in muoni positivi e neutrini  $\nu_\mu$ . I  $\mu^+$  presenti nel fascio vengono allontanati tramite un campo magnetico, i protoni e gli altri adroni sono arrestati su un blocco di ferro. Emerge un fascio pulsato quasi puro di neutrini  $\nu_\mu$  con un'energia media di 17,5 GeV che penetra nella crosta terrestre e raggiunge quasi indisturbato (i neutrini interagiscono con le altre particelle molto debolmente) il tunnel del Gran Sasso.

Lo studio dei neutrini provenienti dal sole e vari esperimenti specifici avevano mostrato che durante la loro propagazione libera i neutrini  $\nu_e$  e  $\nu_\mu$  oscillano, cioè si trasformano alternativamente gli uni negli altri. Vari tipi di argomenti suggerivano che anche il neutrino  $\nu_\tau$  dovesse essere coinvolto in tale oscillazione, ma il fenomeno non era mai stato osservato in maniera diretta. Lo scopo principale dell'esperimento OPERA era quello di confermare che la trasformazione  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$  avvenisse effettivamente. In questo senso l'esperimento sembra avere avuto pieno successo. Durante tre o quattro anni di operazione quattro neu-

---

<sup>1</sup> Per i non fisici ricordo che nella Fisica Atomica si usa come unità base per l'energia l'elettronvolt (eV), definito come l'energia acquistata da un elettrone quando è accelerato in una differenza di potenziale di un Volt. Accanto all'elettronvolt nella Fisica, dei Nuclei e delle Particelle sono molto usati i multipli 1MeV=10<sup>6</sup> eV, 1 GeV=10<sup>9</sup> eV, 1 TeV=10<sup>12</sup> eV.

trini  $v_\tau$  sono stati effettivamente osservati. Il numero è più piccolo di quello atteso ma è ritenuto significativo.

L'apparecchiatura pareva prestarsi, tuttavia, anche ad una misura per la prima volta diretta del *tempo di volo* dei neutrini dal luogo di produzione al CERN fino al Gran Sasso. Questo poteva essere ottenuto confrontando il profilo temporale degli impulsi dei protoni all'atto della loro estrazione con quello della rivelazione dei neutrini  $\nu_\mu$  nell'apparecchio. La distanza tra la sorgente al CERN e il rivelatore al Gran Sasso, di circa 730 km, ha potuto essere misurata con i metodi della Geodesia moderna (basati sull'uso dei satelliti) con la precisione di 20 cm, le misure di tempo eseguite con orologi atomici sincronizzati ai satelliti del sistema GPS erano stimate precise a qualche nanosecondo. In questo modo la collaborazione credette di aver stabilito che la velocità  $c_\nu$  dei neutrini era di 7,5 km/s maggiore di quella della luce,  $\delta=(c_\nu^2-c^2)/c^2\cong 5\times 10^{-5}$ .

Il risultato era in qualche modo sensazionale perché in contraddizione con i principi base della Teoria Relatività Ristretta e, se fosse stato confermato, avrebbe posto in discussione tutto un quadro della Fisica Moderna e in particolare della Fisica delle Particelle che si riteneva ben stabilito. Esso era tuttavia anche in contrasto con vari altri fatti sperimentali, vecchie osservazioni (1987) su neutrini (di energia però molto più bassa,  $\sim 10$  MeV) emessi dalla supernova SN1987 [2] e tutta una serie di test indiretti che sembravano confermare la Teoria ben al di là della pretesa violazione riscontrata da OPERA. In particolare negli ultimi anni del '900 S. Coleman e S.L. Glashow avevano mostrato che sotto ragionevoli ipotesi una violazione dell'invarianza di Lorentz avrebbe dovuto manifestarsi in una serie di processi del tipo dell'*effetto Cherenkov*, che non apparivano e la cui assenza permetteva al contrario di stabilire dei limiti molto stringenti sull'entità di tali violazioni [3]. Specificamente, in una nota pubblicata dopo l'annuncio del risultato di OPERA dallo stesso S.L. Glashow e da un altro collaboratore, A.G. Cohen, veniva mostrato che, nell'ipotesi di una violazione dell'entità indicata, i neutrini avrebbero dovuto perdere rapidamente energia per produzione di coppie elettrone-positone e non avrebbero dovuto essere osservati neutrini con un'energia superiore ai 12,5 GeV, contro le stesse osservazioni della collaborazione [4].

In questa situazione, altri gruppi sperimentali che operavano nelle hall del Gran Sasso rivolsero la loro attenzione al problema. La collaborazione ICARUS [5] per prima presentava un'analisi della distribuzione

energetica dei neutrini fino ad allora raccolti col proprio rivelatore, mostrando che questa corrispondeva perfettamente alle caratteristiche del fascio iniziale. Una ricerca diretta delle ipotetiche coppie elettrone-positrone dava pure risultato negativo; nessuna traccia appariva del fenomeno previsto da Cohen e Glashow. La misura diretta del tempo di volo eseguita da OPERA fu poi ripetuta dall'equipe del rivelatore BOREXINO, progettato per lo studio dei neutrini terrestri e solari, dal rivelatore LVD e ancora da ICARUS, non confermando l'anomalia, trovando invece una velocità dei neutrini uguale, entro gli errori, a quella della luce, come previsto [5-9]. Nel frattempo la stessa equipe di OPERA si era resa conto di un difetto in un'apparecchiatura sperimentale che introduceva un errore sistematico nella misura dei tempi e ripetuto l'esperimento con grande accuratezza ritrovava anche essa la velocità della luce.

Non solo quindi non si era in presenza di neutrini che superavano quella che era ritenuta una velocità limite, ma al contrario la non osservazione della emissione di coppie  $e^-$  e  $e^+$  permetteva di stabilire un limite superiore sul valore della grandezza  $\delta$ , di gran lunga più stringente della precisione con cui si sarebbe mai potuto pensare di misurare la velocità in modo diretto;  $\delta < 4 \times 10^{-8}$  secondo ICARUS,  $\delta < 1,7 \times 10^{-11}$ , combinando vari risultati secondo Cohen e Glashow. L'esperimento che sembrava aver messo in qualche modo in discussione una teoria ormai universalmente accettata aveva alla fine portato in modo più o meno diretto ad una ulteriore straordinaria conferma della stessa.

Dato l'indubbio interesse della questione, voglio nel seguito prima richiamare brevemente per i non fisici le idee che sono alla base della Teoria della Relatività Ristretta e quale sia il ruolo di questa teoria nella Fisica delle Particelle. Successivamente tenterò di illustrare alcuni dei fatti che hanno portato a una sua nuova straordinaria conferma e in particolare discutere l'argomento di Coehn e Glashow, specificamente formulato in relazione al presunto risultato di OPERA.

## 2. PRINCIPI BASE DELLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA

Riprendendo un'originaria intuizione di Galileo, Newton aveva mostrato che, supposte le sue leggi della Meccanica valide rispetto ad un certo sistema di riferimento, esse dovevano conservare la stessa forma in ogni altro riferimento in moto traslatorio uniforme rispetto al

primo. Nelle presentazioni moderne questo risultato viene comunemente dedotto osservando che le equazioni di moto di Newton sono invarianti sotto una trasformazione di coordinate della forma

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

che si suppone colleghi le coordinate di un corpo puntiforme rispetto ad un sistema di riferimento  $K$  con quelle di un secondo sistema  $K'$  in moto traslatorio uniforme rispetto al primo con velocità  $v$  (nella scrittura precedente gli assi dei due sistemi sono ovviamente supposti paralleli e si suppone che l'asse  $x'$  scorra sull'asse  $x$ ).

Alla classe dei sistemi così individuata si dà il nome di *sistemi inerziali*, perché evidentemente in ciascuno di essi vale il principio di inerzia. Il teorema stabilito da Newton si può quindi riesprimere dicendo che le Leggi della Meccanica hanno la stessa forma in tutti i sistemi inerziali o che questi sistemi sono tutti equivalenti per la descrizione del moto. Si parla comunemente anche di principio della Relatività Galileiana e le trasformazioni su riportate sono dette trasformazioni di Galileo, anche se in realtà né Galileo, né Newton, ancora legati all'idea di un moto assoluto, ne avessero completamente compreso la portata.

Nelle seconda metà dell'ottocento, d'altra parte, Maxwell aveva compendiato le leggi dell'Elettromagnetismo nelle sue famose equazioni, che, nel linguaggio di oggi e nel sistema simmetrico di Gauss, possono essere scritte

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} & \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

In queste equazioni compare la costante  $c$  che esprime sostanzialmente la relazione tra campo elettrico e campo magnetico. Una conseguenza fondamentale delle stesse è stata la previsione dell'esistenza di onde elettromagnetiche che si propagano con la velocità  $c$ . La coincidenza numerica di  $c$  con la velocità della luce aveva indotto Maxwell, come è noto, a supporre che la luce fosse una radiazione elettromagnetica, circostanza successivamente confermata nel modo più ampio e a  $c$  ci si riferisce comunemente appunto con questo nome.

Poiché la velocità delle onde è espressa da una costante che compare nelle stesse equazioni fondamentali, sembrerebbe che, a differenza delle leggi della Meccanica, queste non possano valere in qualsiasi rife-

rimento inerziale ma richiedano un sistema privilegiato. Poiché le trasformazioni di Galileo implicano l'additività delle velocità, è infatti ovvio che esse non possono essere invarianti rispetto a queste equazioni. Il sistema privilegiato veniva spontaneamente identificato con l'*etere*, ipotetico mezzo elastico, che si supposeva supporto per la propagazione delle onde luminose e che, corrispondentemente, attraverso le sue deformazioni si sperava potesse permettere un'interpretazione meccanica del campo elettrico e del campo magnetico.

Il fallimento di tutti i tentativi di mettere in evidenza un moto rispetto all'etere, la difficoltà di costruirne un modello ragionevole e soprattutto ragioni di carattere estetico (legate ad una disimmetria che si veniva a creare tra le leggi della Meccanica e quelle dell'Elettromagnetismo) indussero, come è noto, Einstein a rifiutare ogni riferimento a questo mezzo e a formulare la sua famosa Teoria. Questa era fondata su due principi fondamentali: il principio di relatività, secondo cui: *tutte le leggi fisiche debbono avere la stessa forma in ogni riferimento inerziale*, e il principio di invarianza della velocità della luce, secondo cui *la luce ha la medesima velocità  $c$  in ogni direzione e in ogni riferimento inerziale*.

Einstein fece osservare che le trasformazioni di Galileo e la legata legge di addizione delle velocità, che creavano problemi con le leggi dell'Elettromagnetismo, erano in realtà una conseguenza dell'ipotesi dell'esistenza di un tempo assoluto; più precisamente dell'ipotesi che la misura del tempo in cui si verificava un certo evento fosse indipendente dal riferimento. Egli fece notare che in assenza di un segnale che si propagasse con velocità infinita l'ipotesi era ingiustificata, e che solo un confronto tra eventi immediatamente vicini poteva avere un significato operativo. Osservò che, per definire correttamente una misura dei tempi, ogni sistema di riferimento doveva disporre di una rete indipendente di orologi distribuiti in tutto lo spazio, solidali con esso e sincronizzati con qualche criterio. Coerentemente suppose che il tempo attribuito a un evento dovesse esser quello indicato da un orologio disposto nelle sue immediate prossimità e che proprio il principio di invarianza della velocità della luce dovesse fornire il criterio di sincronizzazione. Considerati due sistemi inerziali  $K$  e  $K'$  ed indicate con  $(x, y, z, t)$  le coordinate spaziali e temporali attribuite ad un *evento elementare* da un sistema  $K$  (con  $x, y, z$ , che specificano il *luogo* e  $t$  che specifica il *tempo* a cui l'evento si verifica) e con  $(x', y', z', t')$  quelle attribuite allo stesso evento da un altro sistema inerziale  $K'$ , mostrò che, imponendo i suoi due principi, si ritrovavano in luogo delle trasformazioni di Galileo

(con la stessa disposizione degli assi adottata per le trasformazioni di Galileo) le trasformazioni speciali di Lorentz

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

che erano state originariamente introdotte su base puramente formale e si sapeva che lasciavano invariate le equazioni di Maxwell.

Per  $|v| \ll c$  queste trasformazioni si riducono a quelle di Galileo, per  $|v| \geq c$ , esse invece perdono senso, suggerendo che la velocità della luce debba essere considerata una velocità limite, non superabile da alcun segnale di carattere fisico.

L'esistenza di una velocità limite è importante, per la coerenza della teoria, per un'altra ragione. Se consideriamo due eventi di coordinate temporali  $t_1$  e  $t_2$  rispetto a  $K$  e  $t_1'$  e  $t_2'$  rispetto a  $K'$ , a seconda della loro disposizione spaziale può accadere, in base alle trasformazioni di Lorentz, che sia  $t_1 < t_2$  e  $t_1' > t_2'$ , cioè che la successione temporale si inverta nei due riferimenti. Questa circostanza, tuttavia, si verifica solo se i punti  $P_1$  e  $P_2$  in cui accadono gli eventi sono a distanza ( $\overline{P_1P_2}$ ) maggiore di  $c(t_2 - t_1)$ , cioè di quella che può essere percorsa nel tempo  $t_2 - t_1$  da un segnale che si propaghi con la velocità  $c$ . Se  $\overline{P_1P_2} < c(t_2 - t_1)$ , quindi, se i due eventi possono essere in relazione causale, la successione temporale risulta la medesima in tutti i sistemi di riferimento. Se  $c$  non può essere superata, quindi, non può mai accadere che venga invertito l'effetto con la causa. A questa proprietà, che sembra essenziale per l'interpretazione, si dà il nome di *legge della causalità relativistica*.

Nel contesto è anche notevole, e non molto noto, che trasformazioni del tipo di quelle di Lorentz, e quindi l'esistenza di una velocità limite, possono essere dedotte da ipotesi molto generali, senza alcun riferimento alla velocità della luce. E' sufficiente sostituire il requisito dell'invarianza di quest'ultima con quello che le trasformazioni formino gruppo, cioè che la composizione di due trasformazioni del tipo  $K \rightarrow K'$  e  $K' \rightarrow K''$  dia luogo ad una trasformazione  $K \rightarrow K''$  della stessa forma delle due precedenti. La costante  $c$  che in esse compare è allora una costante arbitraria, una costante di integrazione. Le trasformazioni di Galileo corrispondono al caso limite per  $c \rightarrow \infty$ , quelle di Lorentz propriamente dette alla identificazione di  $c$  con la costante che compare nelle equazioni di Maxwell.

Come abbiamo detto con la sostituzione delle trasformazioni di Lorentz a quelle di Galileo, a meno di una appropriata ridefinizione delle variabili di campo, le equazioni di Maxwell restano invariate. Coerentemente con il principio di relatività, quindi, le leggi dell'Elettromagnetismo, supposte valide in un sistema  $K$ , restano valide in qualsiasi altro sistema inerziale  $K'$ . E' chiaro però che non restano più invariate le equazioni della Meccanica. In obbedienza al principio, queste dovranno essere perciò modificate; in particolare dovranno essere modificate le espressioni dell'energia e del momento di una particella.

Coerentemente con i nostri scopi consideriamo, a questo proposito, l'urto elastico tra due particelle. Secondo l'ordinaria meccanica non relativistica nell'urto il momento e l'energia totali, devono conservarsi, cioè deve aversi

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \\ W_1 + W_2 &= W'_1 + W'_2, \end{aligned}$$

dove i termini a sinistra si riferiscono alle particelle prima dell'urto, quelli a destra alle stesse dopo l'urto. In tale meccanica il momento e l'energia della singola particella sono definite in funzione della velocità  $\mathbf{v}_p$  dalle espressioni

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_p, \quad W = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_p^2 = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2.$$

Con queste definizioni le leggi di conservazione restano invariate sotto trasformazioni di Galileo ma non lo sono più sotto trasformazioni di Lorentz. Una legge di conservazione invariante sotto tali trasformazioni si ottiene se si ridefiniscono momento ed energia nel modo seguente

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}_p}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_p^2/c^2}}, \quad W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_p^2/c^2}}.$$

Le componenti  $p_x, p_y, p_z$  di  $\mathbf{p}$  e la quantità  $W/c$ , costituiscono allora quello che si chiama un tetravettore nello *spazio-tempo*, cioè si trasformano rispettivamente come le coordinate spaziali e come il tempo secondo le trasformazioni di Lorentz. Essendo queste trasformazioni lineari e omogenee primo e secondo membro delle relazioni di conser-



vazione si comportano nello stesso modo nel passaggio da un sistema di riferimento all'altro e sono pertanto invarianti.

Osserviamo che nel limite di bassa velocità le nuove definizioni si riducono a quelle non relativistiche, e quindi in queste condizioni la meccanica ordinaria mantiene, come deve, la sua validità. Per  $v_p=0$  abbiamo tuttavia un'energia a riposo  $W_0=mc^2$  univocamente determinata che esprime la famosa legge *dell'equivalenza tra massa e energia*. Per  $v_p \rightarrow c$  infine energia e momento divengono infinite e questo è un altro modo di guardare al carattere limite della velocità  $c$ .

Nella collisione tra particelle elementari ad alte energie, l'uso delle leggi di conservazione relativistiche diviene ovviamente essenziale. In questo caso si presenta tutta una serie di fenomeni nuovi. Nel processo nuove particelle possono essere prodotte e altre tra quelle originariamente presenti scomparire. Per quanto detto sul modo di trasformarsi dell'energia e del momento, tuttavia, le leggi di conservazione possono essere immediatamente generalizzate in modo invariante anche a tali processi. Si può supporre che il numero delle particelle iniziali o finali sia qualsiasi e che le particelle finali siano diverse da quelle iniziali e scrivere in tutta generalità

$$\sum W_i = \sum W_f, \quad \sum \mathbf{p}_i = \sum \mathbf{p}_f,$$

essendo appunto le somme a sinistra estese a tutte le particelle iniziali (indice  $i$ ) e quelle a destra a tutte quelle finali (indice  $f$ ).

L'ultima equazione è alla base di tutta la nostra comprensione dei fenomeni che riguardano la fisica dei nuclei e quella delle particelle. Poiché in tali esperimenti quello che si misura in maniera più diretta è il momento e non la velocità è però utile riesprimere l'energia in funzione del momento. Una tale espressione può essere immediatamente ottenuta dalla relazione  $W^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4$ ; da cui

$$W = c\sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2}.$$

Il fatto che la grandezza  $W^2 - \mathbf{p}^2 c^2$  sia uguale ad una costante e quindi indipendente dal riferimento, è legato alla circostanza che essa è l'analogo per un tetravettore del modulo di un vettore ordinario.

La velocità può essere riottenuta in funzione del momento, invertendo la definizione originaria o a partire da  $W(\mathbf{p})$  usando la prima equazione di Hamilton,

$$v_p = \frac{\partial W}{\partial p} = \frac{pc}{\sqrt{m^2c^2 + p^2}}.$$

Da quest'ultima equazione si ritrova ovviamente che è sempre  $v_p < c$  e che inversamente  $v_p \rightarrow c$  per  $p \rightarrow \infty$ . In pratica, appena  $pc$  diviene grande rispetto all'energia a riposo  $mc^2$  si può supporre  $v_p \approx c$ .

Si osservi ancora che le espressioni precedenti mantengono senso quando  $m=0$ . Nella fisica relativistica ha quindi senso considerare particelle di massa nulla; per esse si ha  $W=pc$  ed è sempre esattamente  $v_p=c$ . Una particella di questo tipo è il fotone  $\gamma$ , il quanto del campo elettromagnetico. Fino qualche tempo fa anche ai neutrini era attribuita una massa nulla. Oggi il fenomeno dell'oscillazione ci permette di affermare che tale massa, molto piccola e non completamente nota, è però certamente diversa da zero (dell'ordine di una frazione di eV). Tutte le volte che l'energia complessiva è grande rispetto all'energia a riposo è tuttavia sempre lecito trascurare nell'espressione  $W(p)$  il termine di massa e questa è la situazione che quasi sempre si presenta nel caso di neutrini.

### 3. LIMITI SU POSSIBILI VIOLAZIONI DELLA TEORIA

Le conferme della teoria relativistica sono così numerose e i successi, in particolare nello studio del comportamento dei nuclei e delle particelle, così grandi, che eventuali violazioni della stessa devono necessariamente essere piccole. In ogni caso vista la generalità delle considerazioni con cui, come abbiamo visto, esse possono essere dedotte, possiamo sempre ammettere che le equazioni di trasformazione tra un sistema di riferimento e l'altro siano del tipo delle trasformazioni di Lorentz con  $c$  velocità limite assoluta di valore prossimo, ma eventualmente di qualcosa maggiore di quello della luce. Quello che eventualmente invece ammetteremo come ipotesi di lavoro è che le equazioni dinamiche siano solo approssimativamente Lorentz invarianti

Con l'intento di stabilire limiti quantitativi alla precisione entro cui la Teoria della Relatività Ristretta potesse considerarsi confermata dai dati, diversi autori fin dal 1986 partirono dall'ipotesi di lavoro che, alle espressioni delle lagrangiane relativistiche relative ai campi associati secondo la Teoria Quantistica ai vari tipi di particelle, andassero aggiunti piccoli termini che violassero l'invarianza di Lorentz. Si fece

però l'ipotesi che dovesse comunque esistere un sistema di riferimento privilegiato  $\mathbf{F}$  (tendenzialmente identificato con quello del centro di massa della radiazione del fondo cosmico a microonde (CBM)) in cui tali termini fossero essere invarianti per rotazione e per traslazione (che in tale riferimento non ci fossero quindi posizioni o direzioni privilegiate) e si cercò di stabilire quali effetti tali termini potessero avere. Uno studio sistematico in tale spirito è stato in particolare condotto nel 1997-1999, come abbiamo detto, da Coleman e Glashow [3].

Per semplificare le notazioni, in questa sezione supporremo di scegliere l'unità di misura dei tempi, come consueto nella Teoria delle Particelle, in modo che la velocità limite assoluta risulti uguale a 1. In tutte le equazioni precedenti dovremo quindi porre  $c=1$ .

Sotto le ipotesi fatte sopra, l'unico effetto di termini di violazione dell'invarianza relativistica nella lagrangiana per un certo tipo di particella, può essere quello di aggiungere nel sistema privilegiato al termine  $m_p^2$  nell'espressione di  $W^2 - \mathbf{p}^2$  un ulteriore termine negativo proporzionale a  $\mathbf{p}^2$ . Scriveremo perciò

$$W^2 - \mathbf{p}^2 = m_p^2 - \varepsilon_p \mathbf{p}^2,$$

con  $\varepsilon_p$  parametro piccolo, che in generale potrà esser supposto diverso da particella a particella. Equivalentemente l'espressione dell'energia nel sistema  $\mathbf{F}$  andrà scritta

$$W = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2 c_p^2} \quad \text{con} \quad c_p = \sqrt{1 - \varepsilon_p}.$$

e per la velocità avremo

$$\mathbf{v}_p = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{p}} = \frac{c_p^2 \mathbf{p}}{\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2 c_p^2}}.$$

Nell'ipotesi  $c_p$  rappresenta la velocità limite, sempre in  $\mathbf{F}$ , per la specifica particella  $P$  e naturalmente non dovrà essere superiore alla velocità limite assoluta, cioè dovrà essere con le nostre convenzioni  $c_p \leq 1$ .

Per  $c_p < 1$  e, in particolare, diverso da particella a particella diventano possibili processi che in una ordinaria teoria relativistica sarebbero vietati dalle leggi di conservazione. L'espressione dell'energia in un sistema generico  $K$  può essere ottenuta da quella in  $\mathbf{F}$  con una trasformazione di Lorentz trattando, come indicato, l'energia come un tempo e le componenti del momento come coordinate spaziali. La forma dell'espressione sarà però più complicata e dipenderà dalla direzione della velocità  $K$  rispetto a  $\mathbf{F}$ . Per le considerazioni che faremo un riferimento

al sistema  $F$  è però sufficiente e poiché, comunque, la Terra ha una velocità rispetto al baricentro della CMB di 370 km/s contro  $c=300.000$  km/s ( $v^2/c^2 \sim 10^{-6}$ ), a molti effetti lo stesso il riferimento terrestre si potrà identificare con  $F$ .

Per comprendere la natura degli argomenti conviene partire da un effetto reale, l'*effetto Cherenkov*.

Supponiamo che una particella carica si muova in un mezzo con indice di rifrazione maggiore di 1. In tale mezzo la luce si propaga con una velocità  $c_\gamma$  inferiore a quella nel vuoto, possiamo scrivere  $c_\gamma < 1$ . Supposto allora, come di norma  $c_p = 1$ , la condizione perché nel suo moto la particella possa emettere un fotone è che possa essere soddisfatta la legge di conservazione dell'energia

$$\sqrt{m_p^2 + \mathbf{p}^2} = \sqrt{m_p^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2} + |\mathbf{k}|c_\gamma,$$

cioè che per lo specifico  $\mathbf{p}$  esista un valore di  $\mathbf{k}$  che soddisfi l'equazione. Si può verificare che la condizione perché ciò avvenga è che sia

$$v_p = \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}} > c_\gamma,$$

cioè che la particella abbia una velocità superiore a  $c_\gamma$ . Questa relazione è naturalmente impossibile nel vuoto, dove si suppone  $c_\gamma = 1$ , lo è però in un mezzo rifrangente. Il fenomeno è ben noto e correntemente sfruttato per la rivelazione e la misura dell'energia di particelle cariche, registrando i fotoni emessi (*contatori Cherenkov*).

Supponiamo ora che si abbia anche nel vuoto  $c_\gamma < 1$  e che per qualche particella carica sia  $c_p > c_\gamma$ , dovremmo evidentemente attenderci un *effetto Cherenkov nel vuoto*. In effetti la relazione di conservazione dell'energia per emissione di un fotone si scrive in questo caso

$$\sqrt{m_p^2 + \mathbf{p}^2 c_p^2} = \sqrt{m_p^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 c_p^2} + |\mathbf{k}|c_\gamma$$

e di nuovo si trova che essa può essere soddisfatta se

$$v_p = \frac{|\mathbf{p}|c_p^2}{\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2 c_p^2}} > c_\gamma.$$

Questa ultima relazione si può anche riesprimere in funzione dell'energia ottenendo che il processo è possibile se l'energia è superiore ad un valore di soglia, precisamente se

$$W > W_{\text{thr}} = \frac{m_p c_p}{\sqrt{c_p^2 - c_\gamma^2}}.$$

In questo caso la particella carica dovrebbe nella sua propagazione nel vuoto perdere progressivamente energia, fino a portarsi al valore  $W_{\text{thr}}$ . Nel caso di un protone  $p$ ,  $m_p=938$  MeV e, poiché  $c_p$  e  $c_\gamma$  devono comunque essere sempre essere pensati molto prossimi a 1, risulta

$$W_{\text{thr}} = \frac{663}{\sqrt{c_p - c_\gamma}} \text{ MeV}.$$

Poiché nei raggi cosmici si osservano protoni di provenienza extra galattica di energia fino a  $1,25 \times 10^{14}$  MeV,  $W_{\text{thr}}$ , non può essere inferiore a tale valore. Si ha quindi la limitazione

$$c_p - c_\gamma < 3 \cdot 10^{-23}.$$

Similmente, poiché si osservano elettroni di energia fino a 500 GeV =  $5 \times 10^{11}$  eV, deve essere

$$c_e - c_\gamma < 5 \cdot 10^{-13}.$$

Inversamente, se supponiamo  $c_e < c_\gamma$ . Il decadimento

$$\gamma \rightarrow e^- + e^-$$

diviene possibile, se

$$p c_\gamma > 2 \sqrt{m_e^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 c_e^2},$$

ovvero

$$W_\gamma > \frac{2m_e}{\sqrt{c_\gamma^2 - c_e^2}}.$$

Poiché di nuovo nella radiazione cosmica si osservano fotoni di energia fino a 20 TeV =  $2 \cdot 10^7$  MeV, si ottiene la limitazione opposta

$$c_\gamma - c_e < 1,25 \cdot 10^{-15}.$$

Veniamo infine al caso degli ipotetici neutrini superluminali.

Poiché, per quanto ora visto,  $-10^{-13} < c_\gamma - c_e < 10^{-15}$ , se fosse  $c_\nu - c_\gamma = \frac{\delta}{2} \cong 2,5 \times 10^{-5}$ , secondo l'originaria misura di OPERA, dovrebbe anche essere  $c_\nu - c_e \cong 2,5 \times 10^{-5}$ . Ma per  $c_\nu > c_e$ , se

$$W_\nu > W_{\text{thr}} = \frac{2m_\nu c_\nu}{\sqrt{c_\nu^2 - c_e^2}},$$

diviene tra altri possibile il processo di tipo *debole*

$$\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu + e^+ + e^-.$$

Anche attribuendo alla massa del neutrino uno dei valori più alti possibili come  $m_\nu = 0,5$  eV, per il valore di  $\delta$  dato da OPERA si ottiene  $W_{\text{thr}} \cong 140$  MeV, quindi un valore molto inferiore all'energia dei neutrini del fascio (energia media = 17,5 GeV).

In queste condizioni, con un calcolo della probabilità della reazione nel contesto del cosiddetto modello standard, Cohen e Glashow hanno mostrato [3] che i neutrini perderebbero rapidamente energia fino a portarsi ad un valore limite, praticamente indipendente dal valore dell'energia iniziale, dato dalla relazione

$$W_T = \left( \frac{5}{14} \frac{G_F}{192\pi^3} \delta^3 L \right)^{-\frac{1}{3}},$$

essendo  $G_F = 1,17 \times 10^{-5}$  GeV<sup>-2</sup> la costante delle interazioni deboli ed  $L$  la distanza percorsa. Ponendo  $L = 730$  km e  $\delta = 5 \times 10^{-5}$ , si trova  $W_T = 12,5$  GeV. OPERA, non avrebbero dovuto osservare, come invece faceva, neutrini di energia superiore a tale valore e avrebbero dovuto essere osservate coppie elettrone-positone che ICARO ha invece potuto escludere.

Combinando questi risultati con altri dello stesso tipo, tra cui alcuni di esperimenti specificamente dedicati all'osservazione dello spettro di energia di neutrini che avevano attraversato tutta la Terra (Super-Kamiokande) o spessori dell'ordine di 500 km (Ice-Cube), Cohen e Glashow sono giunti a stabilire per il valore di  $\delta$  una serie coerente di limitazioni, la più forte delle quali è come già indicato  $\delta < 1,7 \times 10^{-11}$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] OPERA collaboration, T. ADAMS *et al.*, “Measurement of the neutrino velocity with the OPERA detector in CNGS beam”, *JHEP* **1210** (2012), 093; [arXiv:1109.4897](#) [hep-ex].
- [2] M. J. LONGO, “Tests of Relativity from SN1987a”, *Phys. Rev.* **D36** (1987), 3276.
- [3] S. R. COLEMAN and S. L. GALSHOW, “High energy tests of special relativity”, *Phys. Rev.* **D59** (1999), 116008; “Cosmic ray and neutrino tests of special relativity”, *Phys. Lett.* **B59** (1997), 249-252.
- [4] A.G. COHEN and S.L. GLASHOW, “New Constraints on Neutrino Velocities”, *Phys.Rev.Lett.* **107** (2011), 181803; [arXiv:1109.6562v1](#) [hep-ph].
- [5] ICARUS collaboration, M. ANTONELLO *et al.*, “The ICARUS experiment and the neutrino velocity measurement”, *Nucl.Phys.Proc.Suppl.* **237-238** (2013), 190-192; “A search for the analogue to Cherenkov radiation by high energy neutrinos at superluminal speeds in ICARUS”, *Phys.Lett.* **B711** (2012), 270-275; “Precision measurement of the neutrino velocity with the ICARUS detector in the CNGS beam”, *JHEP* **1211** (2012), 049.
- [6] BOREXINO collaboration, P. ALVAREZ SANCHEZ *et al.*, “Measurement of CNGS muon neutrino speed with BOREXINO”, *Phys. Lett.* **B716** (2012), 401.
- [7] LVD collaboration, N. YU. AGANOVA *et al.*, “Measurement of the velocity of neutrinos from the CNGS beam with Large Volume Detector”, *Phys.Rev.Lett.* **109** (2012) 070801.
- [8] BOREXINO, ICARUS and LVD\_collaboration (Sergio Bertolucci (CERN) for the collaboration), “Neutrino speed: a report on the  $\nu\mu$  speed measurements of the BOREXINO, ICARUS and LVD experiments with the CNGS beam”, *Nucl.Phys.Proc.Suppl.* **235-236** (2013), 289-295.
- [9] LVD and OPERA Collaborations, N.Yu. Agafonova, “Determination of a time-shift in the OPERA set-up using high energy horizontal muons in the LVD and OPERA detectors”, *Eur.Phys.J.Plus* **127** (2012), 7.

