Istituto Lombardo (Rend. Scienze) 152, 247-292 (2018)

D'ALEMBERT FISICO E MATEMATICO

ANTONIO GIORGILLI (*)

Sunto. — Si espone in forma sintetica parte del contenuto di alcune opere matematiche di D'Alembert. Si dedica particolare attenzione al *Traité de dynamique*, e precisamente alla parte riguardante i principi su cui viene fondata la Meccanica. Qui trova spazio la formulazione del metodo che è poi entrato nei trattati di meccanica col nome di *Principio di D'Alembert*. Poi si passano in rassegna alcune applicazioni a problemi di Astronomia. Il contenuto di questa nota è stato presentato nell'ambito di un Incontro di Studio dedicato alle opere di D'Alembert possedute dalla Biblioteca dell'Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere.

* * *

Abstract. — Some mathematical treatises of d'Alembert are presented in in synthetic form. Particular attention is paid to the *Traité de dynamique*, namely the part concerning the principles on which Mechanics is founded. This includes the formulation of the method later entered introduced in treatises on Mechanics under the name *D'Alembert's Principle*. Then some applications to problems in Astronomy are discussed. The content of the note has been presented in a talk given at the Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere, in the context of a conference dedicated to the works of D'Alembert owned by the Library.

1. Apologia

Quando mi fu proposto di prendere parte a un Incontro di Studio su D'Alembert ebbi molte esitazioni. L'obiettivo era presentare i volumi delle opere di D'Alembert che fanno parte del patrimonio librario dell'Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere. A me spettava il compito di occuparmi delle opere a carattere matematico. Un'indagine affascinante, se non altro per il peso di un personaggio come D'Alembert; allo stesso

(*) Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere, Milano. Università degli Studi di Milano, Italy. E-mail: antonio.giorgilli@unimi.it

Fig. 1. Le opere matematiche di D'Alembert elencate nel testo. Fatta eccezione per la prima edizione del Traité de Dynamique (1743), tutte sono in possesso della Biblioteca dell'Istituto Lombardo.

tempo, un compito decisamente impegnativo: illustrare, nel tempo di una conferenza, sei opere che spaziano dalla Meccanica alla Dinamica dei Fluidi e all'Astronomia.

Alla fine ha prevalso la curiosità: chiudendo gli occhi alle difficoltà, ci ho provato. Sono perfettamente cosciente che si tratta di un argomento che in larga misura ricade nell'ambito di competenza degli storici: le idee di D'Alembert hanno lasciato tracce profonde, soprattutto negli sviluppi successivi della Meccanica, ma ben poco è rimasto del formalismo da lui utilizzato. Sono altrettanto cosciente di non potermi qualificare come uno storico della Matematica; spero che questa nota non sia considerata, da parte degli addetti ai lavori, come una sgradita invasione di campo.

Comincio con l'elenco dei volumi disponibili *(Fig. 1).*

(i) *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides,* 1744.

(ii) *Recherches sur la précession des equinoxes et sur la nutation de l'axe de la terre,* 1749.

(iii) *Recherches sur differens points importans du Système du Monde,* in tre volumi a loro volta suddivisi in sei libri:

- (1) *Théorie de la Lune*, vol. primo (1754), libro primo.
- (2) *Recherche de l'orbite des Planetes principales dans le systême de l'attraction*, vol. secondo, libro secondo.
- (3) *Nouvelle recherches sur la Précession des Equinoxes,* & *sur la figure de la Terre* & *de la Lune*, vol. secondo, libro terzo.
- (4) *Nouvelles observations sur les Tables de la Lune*, vol. terzo (1756), libro quarto.
- (5) *Nouvelles remarques sur l'Orbite de la Terre*, vol. terzo (1756), libro quinto.
- (6) *Nouvelles recherches astronomiques et physiques sur la figure de la Terre*, vol. terzo (1756), libro sesto.

(iv) *Traité de dynamique, seconda edizione,* 1758.

A questa lista è d'obbligo premettere la prima edizione del *Traité de dynamique,* pubblicata nel 1743, benché non faccia parte del patrimonio librario dell'Istituto. Il motivo è che in quel trattato D'Alembert espone i principi sui quali si fondano le opere successive. Inoltre la seconda edizione del 1758 amplia considerevolmente il contenuto della prima, ma non introduce modifiche sostanziali all'esposizione dei principi: le aggiunte si concentrano su un numero notevole di applicazioni.

La vastità degli argomenti ha reso indispensabile limitare il campo d'azione. Ho privilegiato i fondamenti della Meccanica, a cui ho dedicato maggior spazio, e tre argomenti di astronomia particolarmente dibattuti all'epoca di D'Alembert: la precessione degli equinozi, il moto della Luna e le ineguaglianze nei moti dei Pianeti maggiori. Ho dato meno peso alla dinamica dei fluidi: un'esposizione ragionevolmente completa avrebbe di gran lunga superato i limiti di tempo concessi a una conferenza – e i limiti di spazio concessi a questa nota.

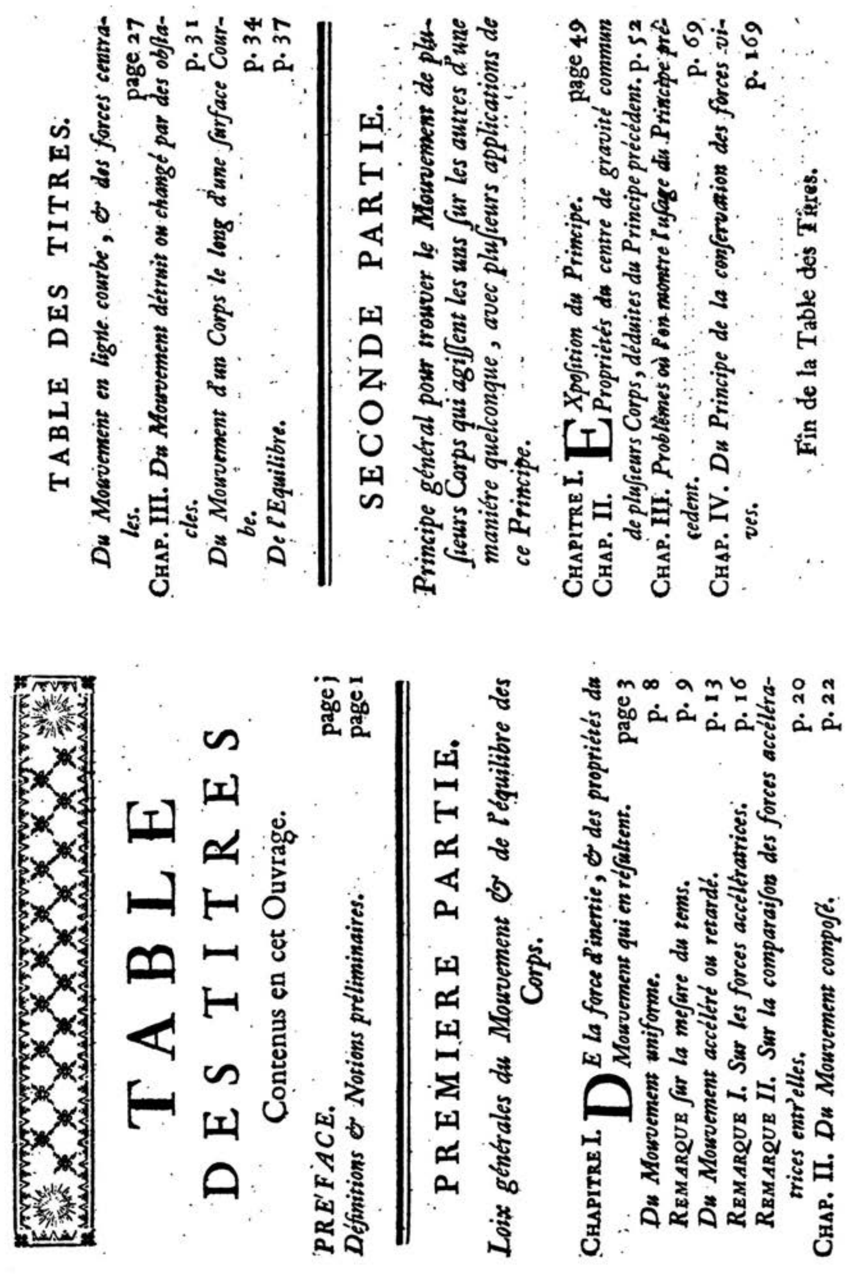


Fig. 2. L'indice del Traité de Dynamique nella prima edizione (1743).

Va da sé che limitando la discussione ai temi elencati si lasciano in ombra altri contributi di notevole interesse, tra cui (per citarne alcuni): gli studi sulla musica e sulle cause dei venti; il criterio di convergenza delle serie; l'enunciato del teorema fondamentale dell'algebra (dimostrato anni dopo da Gauss); il paradosso della dinamica dei fluidi; l'equazione della corda vibrante e la propagazione delle onde. A parziale giustificazione delle omissioni – che qualche lettore potrebbe a buon diritto giudicare deplorevoli – dirò che sono gli argomenti che D'Alembert stesso ha tralasciato nella seconda edizione della *Dynamique*, perché, dice, *"auroient trop grossi le Volume que je mets à jour"*.

2. I principi della Dinamica

Nel 1743 il giovane e arrembante D'Alembert, allora ventiseienne ma già membro dell*Académie Royale des Sciences*, pubblica il suo primo trattato di ampio respiro: il *Traité de dynamique* [2]. Si tratta di un volume di 186 pagine, a cui se ne aggiungono 26 di *Préface*. L'opera si divide in due parti; l'indice è riportato in *Fig. 2.*

Il *Préface* che apre il trattato non lascia dubbi su quale e quanto ambizioso sia il programma di D'Alembert. L'*incipit* è riportato in *Fig. 3*. D'Alembert afferma che la certezza della Matematica si fonda sulla semplicità del suo oggetto di studio. Poi chiarisce il suo pensiero. I principi astratti fondati sull'evidenza, dice, hanno un grado di certezza superiore a quelli fondati sull'esperienza. Così in una scala decrescente di semplicità, si collocano l'Algebra e la Geometria, seguite dalla Meccanica. Più ci si addentra in questioni che riguardano la fisica, e che impongono il ricorso all'esperienza, minore è il grado di certezza della Scienza in oggetto.

Da qui l'obiettivo: sollevare la Meccanica al livello della Geometria. In altre parole: fondare la Meccanica su principi puramente astratti, che siano il più semplici possibile. L'idea che sta alla base è che si debba *fondare la Meccanica solo sul concetto di movimento*: come in Geometria si costruisce una linea pensando di muovere con continuità un punto, o una superficie muovendo una linea, o ancora un solido muovendo una superficie, così in Meccanica si descrive il movimento pensando di trasportare un corpo da un posto all'altro. La differenza sta nel fatto che in Geometria si considerano nel loro insieme le posizioni raggiunte; in Meccanica si deve tener conto anche del *tempo* che un corpo impiega a occupare posizioni diverse.

LA certitude des Mathematiques eſt un avantage que ces Sciences doivent principalement à la ſimplicité de leur objet. Il faut avouer même, que comme toutes les parties des Mathematiques n'ont pas un objet également ſimple, auſſi la certitude proprement dite, celle qui eſt fondée ſur des Principes néceſſairement vrais & évidens par eux-mêmes, n'appartient ni également, ni de la même maniére à toutes ces parties. Pluſieurs d'entr'elles, appuyées ſur des Principes Phyſiques, c'eſt-à-dire ſur des vérités d'Expériences, ou ſur de ſimples hypotheſes, n'ont, pour ainſi dire, qu'une certitude d'Expérience, ou même de pure ſuppoſition. Il n'y a, à parler exactement, que celles qui traitent du calcul des grandeurs, & des propriétés générales de l'étendue, c'eſt-à-dire l'Algébre, la Geométrie & la Méchanique, qu'on puiſſe regarder comme marquées au ſceau de l'évidence. Encore y a-t'il dans la lumiére que ces Sciences préſentent à notre eſprit, une eſpece de gradation, &, pour ainſi dire, de nuance à obſerver. Plus l'objet qu'elles embraſſent eſt étendu, & conſidéré d'une maniére générale & abſtraite, plus auſſi leurs Principes ſont exempts de nuages & faciles à ſaiſir. C'eſt par cette raiſon que la Geométrie eſt plus ſimple que la Méchanique, & l'un & l'autre moins ſimples que l'Algébre.

Fig. 3. Incipit del Préface al trattato sulla dinamica del 1743.

Date le premesse, il concetto di forza viene bandito dai fondamenti della Meccanica. D'Alembert identifica tre principi astratti: (i) il principio d'inerzia; (ii) la legge di composizione dei movimenti; (iii) le leggi dell'equilibrio. Tutta la sua costruzione si regge su questi soli principi. Avendo rifiutato il concetto forza, anche la proporzionalità tra forza e accelerazione e il principio di azione e reazione, che per Newton sono la seconda e la terza legge della Meccanica, vengono rimossi.

2.1 Il contesto storico scientifico

Collocare il trattato di D'Alembert nell'ambiente scientifico che precede la sua opera non è agevole – soprattutto per chi non può qualificarsi come storico della Matematica. La lunga prefazione descrive accuratamente quelli che l'autore considera i suoi contributi e include riferimenti a teorie correnti, ma è avara di informazioni sulle sue fonti. Nel resto del trattato si trovano occasionalmente riferimenti, spesso critici, alle opere di altri scienziati. Talvolta ne sono riportati i nomi, come nei casi di Newton o Eulero o Bernoulli o Leibniz o Mac-Laurin, per fare qualche esempio; in altri casi c'è solo un riferimento in termini generici, come quando nomina *"une Dame illustre par son esprit* & *par son savoir"*. I contemporanei certamente sapevano benissimo a chi si riferisse; per noi è meno immediato riconoscervi Gabrielle Émilie Le Tonnelier de Breteuil, Marquise du Chastelet (1706-1749), autrice di un trattato *Institutions de Physique* (1740) e di una traduzione commentata dei *Principia* di Newton (1749), e attiva partecipante al dibattito sulle *forces vives*. In termini molto rozzi si può dire che D'Alembert considera tutte le opere precedenti come carenti di rigore, e si propone di rimediare a tutte quelle carenze.

Una prima questione riguarda il concetto stesso di movimento, e la sua relazione con lo spazio. Qui l'autore richiama la tesi sostenuta dai seguaci di Cartesio (*Secte à la verité fort affoiblie aujourd'hui*, aggiunge): non c'è distinzione tra spazio e corpi. Il movimento, in particolare quello dei corpi celesti, è generato da vortici in un non meglio definito *etere*. La critica di D'Alembert è che in un contesto simile diventa difficile concepire la possibilità stessa del movimento. Come minimo, afferma, occorre *riconoscere l'impenetrabilità come una caratteristica essenziale dei corpi*. Lo spazio diventa solo il riferimento che consente di determinare la posizione dei corpi.

Una seconda questione riguarda il concetto di *forza*, che nella teoria di Newton è responsabile del movimento. I principi di Newton trovano fondamento nell'esperienza: dalla forza dovuta all'azione diretta tra corpi, ad esempio tramite urto, a quella identificata tramite il movimento generato, come nel caso della dinamica planetaria, a prezzo di introdurre un'azione a distanza. In questo secondo caso la forza, per Newton, diventa un ente matematico utile, sulla cui natura non si impegna. La critica di D'Alembert è che si tratta di un concetto vago e oscuro: nella migliore delle ipotesi possiamo interpretare la forza come la capacità di un corpo in movimento di superare degli ostacoli, il che presuppone un contatto e confligge con l'idea di un'azione che si esercita tra corpi tra loro distanti. Conta solo il movimento con le sue possibili variazioni.

La terza questione entra nel merito della discussione sulle cosiddette *forze vive*. La domanda che si pone è se la forza da attribuire a un corpo debba considerarsi come prodotto della massa per il quadrato della velocità (mv^2, che noi chiamiamo energia cinetica, a parte un fattore $1/2$), oppure come prodotto della massa per la velocità (mv, che noi chiamiamo quantità di moto). Paladini della prima ipotesi sono i seguaci di Leibniz; la seconda risale a Cartesio ed è sostenuta dalla scuola francese che si ispira a Malebranche e dalla scuola inglese che fa riferimento a MacLaurin. D'Alembert ritiene che: *"Malgré les disputes que cette question a causées, l'inutilité parfaite dont elle est pour la Mécanique m'a engagé à n'en faire aucune mention dans l'Ouvrage que je donne aujourd'hui."*. Coerentemente con la sua convinzione che il concetto di forza sia oscuro, se non fuorviante, egli riconduce la discussione alle cause che possono modificare il movimento: non ha senso attribuire la forza a un corpo o considerarla come inerente ad esso; ha senso invece domandarsi quanti e quali ostacoli possa vincere un corpo in movimento. Posto il problema in questi termini, l'uso della quantità di moto o dell'energia cinetica diventa questione di opportunità o di preferenza personale nella scelta del metodo – quando non un mero gioco di parole. E qui non rinuncia a un giudizio caustico sulla questione: *"Aussi n'auroit-elle pas sans doute enfanté tant de volumes, si on se fut attaché à distinguer ce qu'elle renfermoit de clair & d'obscur. En s'y prenant ainsi, on n'aurait besoin que de quelques lignes pour décider la question: seroit-ce là ce que la plûpart de ceux qui ont traité cette matiére, auroient voulu éviter?"*. Ritornerà sull'argomento solo nel capitolo V e ultimo della parte seconda (edizione del 1743), intitolato *"Du Principe de la conservation des forces vives"*: a suo avviso, si tratta non di un *principio*, ma di un *teorema*, applicabile a una serie di casi, da dimostrare partendo dai principi.

2.2 Definizioni e concetti preliminari

Il trattato vero e proprio inizia con un breve paragrafo in cui si danno alcune definizioni preliminari, che espongo in forma alquanto abbreviata.

(i) *Corpi:* porzioni di spazio impenetrabili. La parte di spazio che il corpo occupa è detta *luogo di un corpo*.

(ii) Un corpo è *a riposo* se occupa costantemente lo stesso luogo. Un corpo è *in movimento:* se occupa successivamente e con continuità dei luoghi contigui.

(iv) *Tempo:* è un concetto che nasce dal fatto che un corpo non può occupare due luoghi distinti; pertanto non può spostarsi da un luogo all'altro senza occupare tutte le posizioni intermedie, in successione ordinata: noi diciamo che impiega un certo tempo.

(v) Poiché lo spazio percorso da un corpo in movimento è divisibile all'infinito, lo stesso vale per il tempo. Un corpo che si muove in linea retta senza subire altri mutamenti che il cambio di posizione non può che percorrere spazi eguali in tempi eguali; è il *moto uniforme*. Se gli spazi percorsi aumentano o diminuiscono si parlerà di moto *accelerato* o *ritardato*.

Se mi è consentito aggiungere un breve commento, direi che qui emerge l'opposizione alle tesi cartesiane: ciò che caratterizza un corpo come qualcosa di diverso dallo spazio è la sua impenetrabilità. Inoltre l'esistenza del tempo viene ricondotta a un fatto geometrico: c'è il tempo perché c'è il movimento; c'è il movimento perché cambia la collocazione spaziale di un corpo. L'uniformità del tempo viene ricondotta all'uniformità degli spazi percorsi durante il movimento.

2.3 La forza d'inerzia, la misura del tempo e la rappresentazione del movimento.

Veniamo ora al primo dei principi: l'inerzia. Qui D'Alembert fa appello a Newton: *forza d'inerzia* è la proprietà dei corpi di mantenere lo stato in cui si trovano; lo stato può essere a sua volta di *riposo* o di *movimento*. Da qui seguono due affermazioni:

(i) un corpo a riposo persiste nel suo stato, a meno che non intervenga una causa;

(ii) un corpo messo in movimento da una causa qualunque continua a muoversi di moto uniforme in linea retta, a meno che non intervenga una causa che ne modifichi lo stato.

Per Newton, così come per Galileo (che non viene minimamente citato), il principio d'inerzia è un fatto *sperimentale*. Per D'Alembert si tratta invece di un principio *deducibile da considerazioni puramente razionali.* Egli dimostra la validità del principio mediante un argomento di carattere geometrico, illustrato nel quadro 1 di *Fig. 4*.

Si fa ricorso alla ragione sufficiente. Non c'è ragione per ammettere che la materia abbia in sé stessa la capacità di modificare il proprio stato meccanico: la materia è indifferente al riposo o al movimento, dunque non può modificare la propria velocità o la propria direzione. Se un corpo si muove di moto uniforme sul segmento AB il suo stato nei punti

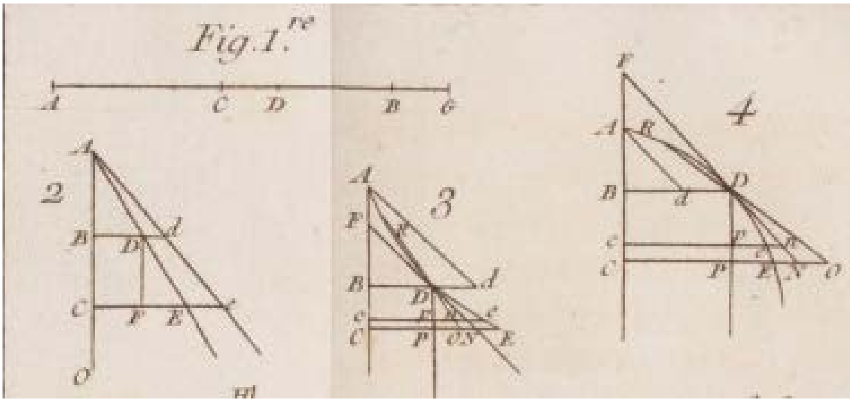


Fig. 4. Ad illustrazione del principio d'inerzia e delle relazioni tra tempo e movimento. Si noti che, contrariamente alle nostre abitudini, qui la coordinata spaziale è riportata sull'asse delle ascisse, il tempo sulle ordinate.

arbitrari C e D interni al segmento è necessariamente identico, perché potrebbe mutare solo per una capacità innata nel corpo stesso. Ora, se trovandosi in C esso può raggiungere il punto B muovendosi uniformemente, segue che trovandosi in D dovrà raggiungere un punto G, sulla stessa retta, tale che le distanze $|CB|$ e $|DG|$ siano eguali; e così di seguito. Ciò, sottolinea D'Alembert, indipendentemente dall'assumere che la causa che genera il movimento agisca istantaneamente in A o che la causa mantenga il movimento agendo con continuità e uniformità – ipotesi, quest'ultima, che egli non condivide.

Accettata l'esistenza del moto uniforme, si pone la questione della misura del tempo. Un confronto diretto tra gli intervalli di tempo è chiaramente impossibile: noi possiamo solo confrontare tra loro, e dunque misurare, gli spazi percorsi da un corpo in un determinato intervallo di tempo. Ne segue che lo strumento naturale per la misura del tempo è il moto uniforme. D'Alembert fa ricorso a una rappresentazione grafica, riportata in *Fig. 4* nel quadro 2. Sulla retta verticale si rappresentano degli intervalli di tempo, ad esempio AB o AC; gli spazi percorsi si rappresentano con segmenti orizzontali, ad esempio BD o CE. Il moto uniforme è rappresentato dalla retta passante per i punti $D,\ E$. I rapporti tra gli intervalli di tempo vengono ricondotti in tal modo a rapporti tra lunghezze di segmenti – ossia a una misura puramente geometrica. Questo è il modo più semplice di cui disponiamo.

Resta una domanda: come possiamo riconoscere se un moto sia o no uniforme? Qui il ricorso all'esperienza è inevitabile. Ad esempio, in qualche caso abbiamo buone ragioni per ritenere che l'effetto di un'azione acceleratrice o ritardante sia praticamente insensibile; oppure possiamo confrontare tra loro movimenti diversi descritti dalla stessa legge, o tali che gli spazi percorsi in eguali intervalli di tempo siano sensibilmente proporzionali tra loro. In pratica, pur non avendo la certezza dell'uniformità, possiamo pur sempre arrivare a una buona approssimazione.

La rappresentazione grafica del movimento consente anche di caratterizzarlo scrivendo delle equazioni per la velocità e l'accelerazione. Così, se nel quadro 2 di *Fig. 4* gli intervalli Bd e Ce sono nella stessa proporzione di BD e CE allora anche la retta passante per i punti $d,\ e$ descrive un moto uniforme. Nel caso di non uniformità si avrà una curva convessa per il moto accelerato (quadro 3), concava per il moto ritardato (quadro 4). La velocità viene caratterizzata ricorrendo alla retta tangente in un punto alla curva che rappresenta il movimento. Denotando con $\mathrm{d}e$ l'incremento infinitesimo dello spazio percorso nell'intervallo infinitesimo $\mathrm{d}t$ la velocità u è ricavata dalla relazione

$$\mathrm{d}e = u\,\mathrm{d}t\,. \tag{1}$$

La divisibilità degli intervalli spaziali e temporali giustifica l'operazione. Per l'accelerazione occorre considerare l'incremento dell'incremento dello spazio, denotato con $\mathrm{dd}e$, e si ottiene la relazione

$$\mathrm{dd}e = \varphi(e,t)\mathrm{d}t^2 \quad \text{ovvero} \quad \mathrm{d}u = \varphi(e,t)\mathrm{d}t\,, \tag{2}$$

dove $\varphi(e,t)$ è una funzione di spazio e tempo. Qui è necessario soffermarsi un momento. Una lettura ingenua ci indurrebbe a identificare l'ultima relazione con il principio della dinamica che nei nostri testi viene solitamente scritto nella forma $F = ma$ ovvero $F = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ (con notazioni abituali che non richiedono spiegazioni). Ma non dobbiamo farci trarre in inganno dalla nostre abitudini. D'Alembert, che evidentemente si ispira ai metodi geometrici dei *Principia* di Newton ma rifiuta il concetto di forza, considera incrementi infinitesimi in un intervallino di tempo $\mathrm{d}t$, *pensato, quest'ultimo, come costante*. L'argomento di D'Alembert è svolto mediante sottili considerazioni geometriche sulle figure, ma direi che lo si può esprimere in modo per noi più leggibile come segue. Se nell'intervallino $\mathrm{d}t$ lo spazio percorso è $\mathrm{d}e$ la relazione (1) per la velocità è praticamente immediata. Per l'accelerazione occorre invece considerare due intervallini di tempo $\mathrm{d}t$ consecutivi ed eguali. Se $\mathrm{d}e$ e $\mathrm{d}e'$ sono gli spostamenti durante i due intervalli si ricaveranno le velocità corrispondenti dalle relazioni $\mathrm{d}e = u\,\mathrm{d}t$ e $\mathrm{d}e' = u'\,\mathrm{d}t$. Di conseguenza l'incremento infinitesimo $\mathrm{d}u = u' - u$ della velocità dovrà soddisfare la relazione $(u' - u)\mathrm{d}t = \mathrm{d}e' - \mathrm{d}e = \mathrm{dd}e$, introducendo così l'incremento dell'incremento dello spazio. Osservando che $\mathrm{dd}e$ dipende dalla posizione iniziale e dal tempo ne risultano le due relazioni (2). Ma si deve ancora assegnare un significato a $\varphi(e, t)$.

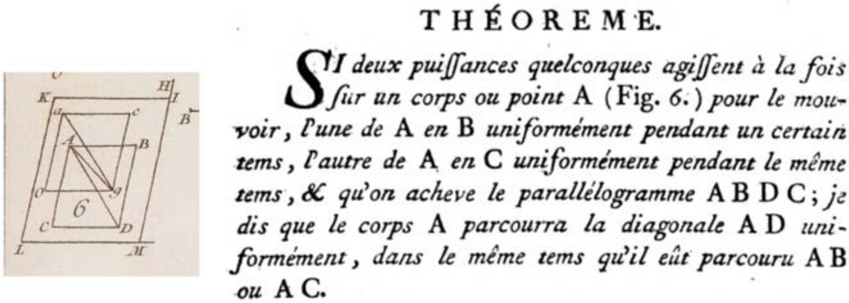
L'interpretazione corrente, dovuta a Newton e accettata ad esempio da Daniel Bernoulli (1700-1782) e Leonhard Euler (1707-1783), identifica $\varphi(e, t)$ con la forza. La critica di D'Alembert è che noi possiamo valutare la forza, nella migliore delle ipotesi, solo nel caso di contatto diretto tra i corpi (ad esempio misurandone l'impulso). Qualunque altra causa di movimento è *a priori* ignota, e si manifesta solo tramite i suoi effetti – ossia perché distrugge l'uniformità del moto. Vi sono solo due possibilità: se il movimento è noto, allora $\varphi(e, t)$ si calcola direttamente con un'operazione di derivazione, sicché le equazioni (2) *definiscono* la funzione $\varphi(e, t)$; se il movimento non è noto, allora la forma da dare alla funzione $\varphi(e, t)$ è materia di *pura ipotesi*, e si deve calcolare il movimento risolvendo le equazioni differenziali (2). Dunque $\varphi(e, t)$ rappresenta solo *"la quantité à laquelle l'accroissement de la vitesse est proportionel"*. Nel seguito del trattato il termine *forza* viene spesso usato, ma con la precisazione che si tratta solo di un'abbreviazione convenzionale che sostituisce la frase riportata qui sopra.

2.4 La composizione dei movimenti

L'enunciato della legge di composizione dei movimenti nella forma datagli da D'Alembert è riportato in *Fig. 5*. In forma per noi più abituale possiamo dire: *Gli spostamenti si compongono secondo la regola del parallelogramma.* Il teorema ha una serie di corollari, che mi limito a richiamare in quanto sono ormai conoscenza comune.

(i) La regola di composizione dei movimenti si applica anche alle velocità e alle forze acceleratrici, queste ultime intese nel senso precisato alla fine del paragrafo precedente.

(iii) Inversamente, si possono scomporre arbitrariamente movimenti, velocità o forza in componenti in modo da rispettare la regola del parallelogramma. Più in generale: si possono scomporre movimenti, velocità e forze acceleratrici in un numero arbitrario di componenti.


THÉOREME.

SI deux puiſſances quelconques agiſſent à la fois ſur un corps ou point A (Fig. 6.) pour le mouvoir, l'une de A en B uniformément pendant un certain tems, l'autre de A en C uniformément pendant le même tems, & qu'on acheve le parallélogramme A B D C; je dis que le corps A parcourra la diagonale A D uniformément, dans le même tems qu'il eût parcouru A B ou A C.

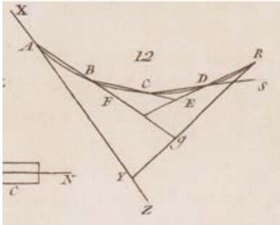
Fig. 5. L'enunciato della legge di composizione dei movimenti nel Traité de Dynamique.

2.5 L'azione dei vincoli e le leggi dell'urto

Fin qui si può dire che non vi siano grosse novità rispetto a quanto era noto – fatto salvo qualche aspetto della dimostrazione della regola del parallelogramma. Ma ora D'Alembert comincia a introdurre un elemento nuovo, che prelude alla trattazione dell'equilibrio.

Supponiamo che un corpo (noi diremmo: un punto materiale) sia vincolato a muoversi su una curva. Secondo il principio d'inerzia il corpo dovrebbe muoversi in linea retta; quindi il vincolo deve esercitare un'azione che modifichi la traiettoria, e l'azione (o forza acceleratrice) deve calcolarsi mediante le relazioni (2). Qui occorrono alcune considerazioni di carattere geometrico che riassumo in forma molto scarna. Si approssima un piccolo tratto di curva con un tratto di circonferenza e si mostra che la forza esercitata dal vincolo è proporzionale al quadrato della velocità, inversamente proporzionale al raggio della circonferenza, e diretta perpendicolarmente alla curva. Si tratta della formula a noi ben nota $a = v^2/r$ (con notazioni ovvie).

Il teorema enunciato da D'Alembert e riportato in *Fig. 6* afferma, in breve: *Se un corpo non è soggetto ad azioni diverse da quella del vincolo la sua velocità lungo la curva resta costante.* La dimostrazione è un po' laboriosa; anche qui si fa uso di metodi geometrici, approssimando la curva con una successione di segmenti che possono rendersi arbitrariamente piccoli (si veda il diagramma in *Fig. 6*). Verrebbe spontaneo chiedersi: perché non servirsi del calcolo degli infinitesimi, del resto noto a D'Alembert? La risposta la dà lui stesso: col metodo degli infinitesimi si mostra solo che la variazione di velocità è dell'ordine del quadrato della lunghezza dei segmenti; il metodo geometrico invece permette di con-



THÉOREME.

Si un corps mû ſuivant une droite X A (Fig. 12) *rencontre la ſurface courbe* A R, *touchée en* A *par* X A, *& ſur laquelle il ſoit obligé de ſe mouvoir ; je dis qu'il ne perdra de* A *en* R *aucune partie de ſa viteſſe.*

Fig. 6. Il moto di un corpo vincolato a una curva.

cludere che è davvero nulla. Evidentemente il calcolo differenziale non era ancora sufficientemente sviluppato.

La dimostrazione anticipa gli argomenti che troveremo nello studio degli equilibri. Nelle ipotesi dell'enunciato di *Fig. 6* possiamo distinguere due fasi: l'urto del corpo contro la curva seguito da un movimento lungo la curva stessa. L'idea guida è che all'atto del contatto del corpo con la curva si può scomporre la velocità in due componenti: una perpendicolare alla curva, l'altra tangente. Il vincolo imposto dalla curva distrugge la componente ortogonale, ma lascia invariata quella tangente, sicché il corpo prosegue lungo la curva stessa mantenendo la sola componente tangente della velocità. A partire da quell'istante si può scomporre la curva in archi arbitrariamente piccoli, così da potersi considerare segmenti, e agli estremi si procede ancora alla scomposizione della velocità; qui però la componente ortogonale è già nulla, perché il corpo ha velocità tangente alla curva. Ne segue che nessuna componente della velocità viene distrutta dal vincolo.

La prima parte del trattato si chiude con le leggi dell'urto anelastico, stabilite nell'enunciato di *Fig. 7*. L'ipotesi è che due corpi che si muovono in direzioni opposte si urtino, e dopo l'urto formino un unico corpo composto dai precedenti. Se le velocità iniziali dei due corpi sono inversamente proporzionali alle masse allora esse vengono distrutte, sicché il nuovo corpo composto resta in equilibrio.

La dimostrazione è abbastanza elaborata. Inizia col considerare due corpi di egual massa, aventi la stessa velocità. In tal caso l'equilibrio segue, ancora una volta, da un argomento di ragion sufficiente: non c'è ragione per cui il corpo composto possa muoversi trasversalmente alla direzione delle due velocità all'istante dell'urto, e non c'è ragione per cui una delle due velocità debba prevalere sull'altra. Abbiamo dunque una situazione analoga a quella dell'urto contro una curva: le velocità si distruggono a

THÉOREME.

Si deux corps dont les viteſſes ſont en raiſon inverſe de leurs maſſes, ont des directions oppoſées, de telle maniere que l'un ne puiſſe ſe mouvoir ſans déplacer l'autre, il y aura équilibre entre ces deux corps.

Donc en général quel que ſoit le nombre des corps; *il y aura équilibre, quand la ſomme des quantités de mouvement de ceux qui tirent en un ſens, ſera égale à la ſomme des quantités de mouvement de ceux qui tirent en ſens contraire.*

Fig. 7. Le leggi dell'urto anelastico.

vicenda. Stabilito questo, si passa a considerare il caso di un corpo che abbia massa multipla dell'altro. Supponiamo, ad esempio, che il primo corpo abbia massa doppia del secondo. Allora lo si può considerare come composto da due corpi di egual massa con velocità eguali, che si sommano per composizione. Perché queste vengano annullate dalla velocità del secondo corpo occorre che ciascuno di essi abbia una velocità pari alla metà di quella del secondo. In altri termini, devono eguagliarsi le *quantità di moto*. Con un argomento simile si tratta il caso di un rapporto razionale tra le masse, e lo si estende al caso di masse incommensurabili. Infine, sempre per composizione di velocità, o meglio di quantità di moto, si trova la condizione di equilibrio per un numero qualunque di masse.

2.6 La dinamica

La seconda parte del *Traité de dynamique* entra nel vivo del problema della dinamica: molto breve (nella prima edizione), ma qui sta il contributo più rilevante di D'Alembert.

La discussione inizia osservando che noi conosciamo tre tipi di azioni reciproche tra corpi: (i) impulso diretto, ad esempio con l'urto; (ii) azione mediata da altri corpi, quali carrucole, fili, aste, leve &c; (iii) azione reciproca, ad esempio la gravitazione. I primi due tipi comprendono la classe dei *sistemi vincolati*, proprio quelli che si rivelavano più difficili da descrivere in termini geometrici. Su quelli si concentra la discussione successiva, in quanto il caso della gravitazione è già stato ampiamente studiato, oltre che da Newton, anche da Bernoulli, Eulero e altri.

PROBLÊME GÉNÉRAL.

Soit donné un ſyſtême de corps diſpoſés les uns par rapport aux autres d'une maniere quelconque; & ſuppoſons qu'on imprime à chacun de ces Corps un Mouvement particulier, qu'il ne puiſſe ſuivre à cauſe de l'action des autres Corps; trouver le Mouvement que chaque Corps doit prendre.

De là réſulte le principe ſuivant, pour trouver le mouvement de pluſieurs corps qui agiſſent les uns ſur les autres. *Décompoſés les mouvemens a, b, c,* &c. *imprimés à chaque corps, chacun en deux autres* a, α; b, β; c, κ; &c. *qui ſoient tels, que ſi l'on n'eût imprimé aux corps que les mouvemens* a, b, c &c. *ils euſſent pû conſerver ces mouvemens ſans ſe nuire réciproquement; & que ſi on ne leur eût imprimé que les mouvemens* α, β, κ, &c. *le ſyſtême fût demeuré en repos*; il eſt clair que a, b, c feront les mouvemens que ces corps prendront en vertu de leur action. *Ce qu'il falloit trouver.*

Fig. 8. L'enunciato del problema della dinamica in forma generale e il metodo per risolverlo.

Il problema si enuncia brevemente come segue: *Studiare il movimento di un sistema di corpi tra loro vincolati, ciascuno dei quali è sottoposto a un'azione (forza) di intensità e direzione arbitraria.*

Nell'affrontare questo problema D'Alembert propone il suo principio generale per trattare i problemi della dinamica. Si trova anzitutto la velocità (o la variazione di velocità) indotta dall'azione esercitata su ciascuno dei corpi; denotiamo queste quantità con $a, b, \ldots$ che sono note. Ora teniamo conto dei vincoli: scomponiamo ciascuna velocità in due componenti $a = \mathtt{a} + \alpha$, $b = \mathtt{b} + \beta$ e così via, con la prescrizione che $\alpha, \beta, \ldots$ siano le componenti che vengono annullate dai vincoli, e $\mathtt{a}, \mathtt{b}, \ldots$ siano compatibili con i vincoli stessi nel senso che se ai vari corpi venissero applicate solo le velocità $\mathtt{a}, \mathtt{b}, \ldots$ allora tutto il sistema si muoverebbe come se non fosse soggetto a vincoli, e questo risolve il problema. Il fatto rilevante è che *il problema della dinamica viene ricondotto a quello della statica*. Qui è bene soffermarsi un momento.

Nel caso della statica il problema è la ricerca di un equilibrio sotto le azioni (o forze) esercitate sui corpi. Lo schema seguito nella prima parte del trattato si riassume in tre punti.

- Il corpo è inizialmente fermo;
- l'impulso gli comunica una velocità a, che si scompone in $a = \mathsf{a} + \alpha$ col criterio descritto sopra;
- l'equilibrio si mantiene se $\mathsf{a} = 0$.

Nel caso della dinamica si ripete lo stesso schema, opportunamente modificato.

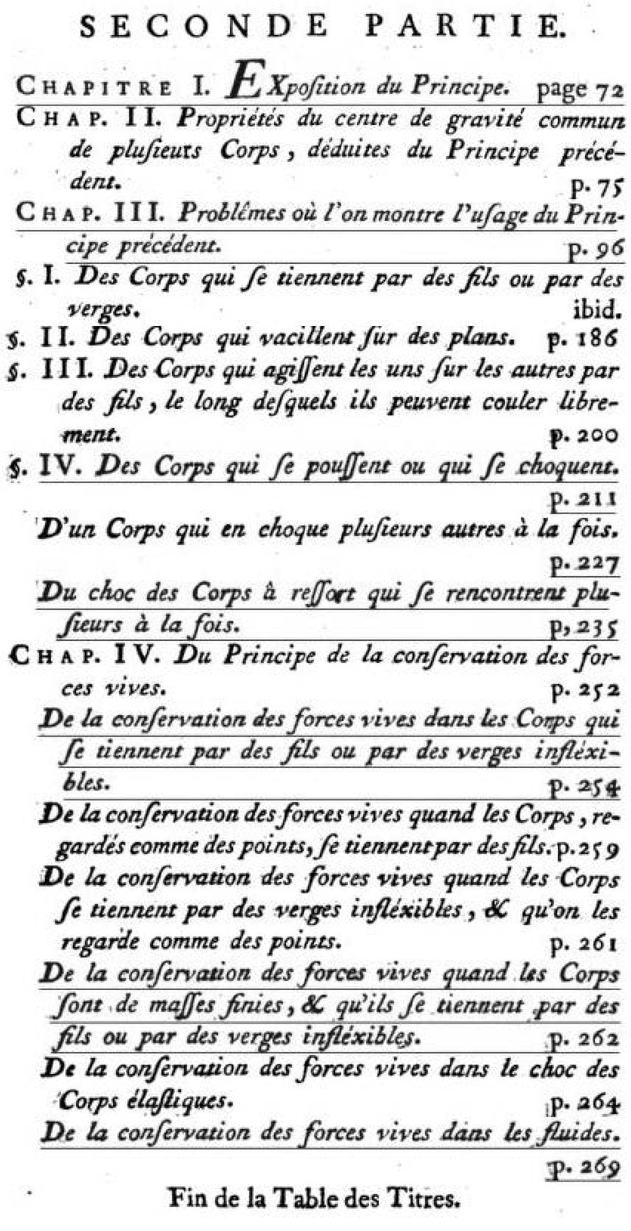
- Il corpo è inizialmente in moto con una velocità data, compatibile con il vincolo;
- l'impulso gli comunica un *incremento* di velocità a, che si scompone in $a = \mathsf{a} + \alpha$ con lo stesso criterio usato per la statica;
- l'incremento effettivo di velocità è solo a.

In ambedue i casi l'incremento a di velocità si trova annullando la componente α dell'impulso equilibrata dal vincolo. Per ottenere l'equilibrio si chiede anche $\mathsf{a} = 0$. Tutto questo si applica singolarmente a ciascuno dei corpi costituenti il sistema.

2.7 La seconda edizione, 1758

Il *Traité de dynamique* vede una seconda edizione a 15 anni di distanza dalla prima. Si tratta, lo dice l'autore stesso, di una versione aumentata di oltre un terzo. In effetti basta un rapido conteggio delle pagine per rendersene conto: si passa dalle 186 della prima edizione alle 278 della seconda. Ancor più significativo è il confronto tra gli indici delle due edizioni. La prima parte è praticamente invariata; l'indice della seconda parte, in *Fig. 7*, è considerevolmente più lungo.

Le sezioni riguardanti i principi, contenute nella prima parte e nei primi due capitoli della seconda parte, sono sostanzialmente invariate rispetto alla prima edizione. Le differenze emergono nel seguito, e riguardano le applicazioni dei principi a una serie di problemi che l'autore ha studiato nel corso degli anni. Il cap. III della seconda parte riguarda il problema di corpi che interagiscono mediante fili o verghe, quello di corpi solidi poggianti su un piano, oppure casi di urto tra cui si include anche il caso elastico. Il cap. IV è quello ampliato in modo più considerevole. Vi si discute il Principio delle Forze Vive, quello che per noi è il teorema dell'energia cinetica: lo si dimostra sulla base dei principi, e se ne danno diverse applicazioni, comprendendo anche il caso dei fluidi.



SECONDE PARTIE.

Fin de la Table des Titres.

Fig. 9. L'indice della seconda parte del Traité de dynamique nella seconda edizione, 1758.

D'Alembert non manca di elencare alcuni temi, già trattati in pubblicazioni precedenti, che ha rinunciato a includere: il moto di rotazione di un solido attorno a un asse, che è interessante anche per la precessione degli equinozi; il problema del moto e delle oscillazioni di un corpo in un un fluido; una nuova dimostrazione del principio di composizione delle forze. Spicca in particolare il riferimento al problema delle vibrazioni di una corda, di ovvio interesse per gli strumenti musicali. Ancora una volta l'autore non risparmia una frecciata ai contemporanei: quello che è rimasto un progetto non inserito nel trattato è *"un écrit assez étendu sur les vibrations des cordes sonores, en réponse aux objections qui m'ont été faites sur ce sujet dans les* Mémoires de l'Académie de Berlin *de 1753, par deux grands géometres, M*[rs] *Bernoulli & Euler, divisés d'ailleurs entre eux, même dans ce qu'ils me contestent, puisque l'un m'accorde ce que l'autre me nie."* La frase lascia trasparire le accese discussioni in corso, in quel periodo, sul modo di trattare il problema; una questione brillantemente risolta nel 1762 da Lagrange [9].

3. La statica e la dinamica dei fluidi

Il volume della *Dynamique* ha come continuazione naturale il *Traité de l'equilibre et du muvement des fluides*, un trattato di 458 pagine, oltre a 32 di *Préface*. Ne parlo molto brevemente: il contenuto è troppo vasto, ed è ben difficile ridurlo a poche pagine. Si deve anche osservare che l'influsso di quel trattato sugli sviluppi successivi della fluidodinamica non è paragonabile a quello della *Dynamique* sulla Meccanica.

Il desiderio di D'Alembert sarebbe fondare anche la Meccanica dei fluidi su basi puramente razionali. A tal fine, dice, potremmo considerare un fluido come composto da un gran numero di piccoli corpi che interagiscono tra loro secondo le regole sviluppate nella *Dynamique.* In tal modo la teoria dei fluidi ci darebbe lo stesso grado di certezza di quella della dinamica, essendo fondata sugli stessi principi metafisici che stanno alla base della dinamica dei corpi. Ma qui è costretto ad ammettere, suo malgrado, che si tratta di un progetto irrealizzabile: noi ignoriamo i dettagli sulla forma e disposizione delle particelle nel fluido e sulle interazioni reciproche. Così diventa indispensabile ricorrere all'esperienza, accettandone tutti i limiti. L'obiettivo diventa isolare i principi minimi indispensabili per la costruzione della teoria.

Loix générales de l'équilibre dans un Fluide dont les parties ſont animées par des Peſanteurs quelconques.

THEORÊME I.

1. *SI un vaſe de figure quelconque* ABC (Fig. 1), *eſt entiérement rempli par un Fluide, & qu'ayant fait à ce vaſe un petit trou* A, *l'on preſſe en cet endroit la ſurface du Fluide, la preſſion ſe répandra également en tout ſens & dans toutes les parties du Fluide, de maniére que tous les points* E, D, &c. *du vaſe ſeront preſſés ſuivant les lignes* DF, EG, *perpendiculaires à la ſurface* ABC, *avec une force égale à la force qui preſſe en* A.

Cette propoſition doit être regardée comme un Principe d'Expérience, dont tout le monde convient : & la proprieté des Fluides dont il s'agit ici, eſt ce que nous connoiſſons de plus certain ſur leur nature.

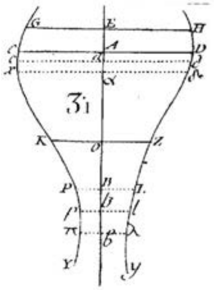
Fig. 10. Il principio su cui si fonda la statica dei fluidi.

3.1 La statica dei fluidi

Il libro primo del trattato, per un totale di 68 pagine, è dedicato alla statica. Oltre ai principi enunciati nella *Dynamique,* D'Alembert pone come fondamento il principio che troviamo enunciato in *Fig. 10: la pressione esercitata in un punto del fluido si distribuisce uniformemente in ogni punto interno al fluido e in ogni direzione.* Si tratta di un principio accettato come *fatto sperimentale*. Segue un elenco di problemi trattati nei vari capitoli. Ne richiamo alcuni: (a) la pressione sulle pareti di un vaso è ortogonale in ogni punto alla superficie; (b) l'equilibrio di un fluido pesante, che include anche il caso di vasi comunicanti; (c) l'equilibrio di solidi inmmersi in un fluido; (d) la variazione della pressione con la profondità in un liquido pesante; (e) il caso di fluidi non omogenei; (f) l'equilibrio di fluidi con superficie curva, interessante per capire la forma dei corpi celesti; (g) il caso di fluidi comprimibili.

3.2 La dinamica dei fluidi

Il problema della dinamica è trattato nel secondo libro, ben più esteso del primo: 125 pagine. D'Alembert, nel primo capitolo, pone dei principi generali. L'enunciato del primo principio è riportato in *Fig. 11.* A



Principes généraux pour trouver le mouvement d'un Fluide renfermé dans un vaſe de figure quelconque.

THEORÊME I.

83. S*I un Fluide* DCPL, (Fig. 31) *indéfini ou non, coule de* A *vers* B *dans un vaſe de figure quelconque* HGYy, *& qu'on diviſe le Fluide en tranches* CD, KZ, PL *perpendiculaires à* AB, *je dis que la viteſſe de chaque tranche ſera en raiſon inverſe de ſa largeur, c'eſt-à-dire, que la viteſſe en* CD, *par exemple, ſera à la viteſſe en* PL, *comme* PL *eſt à* CD.

Fig. 11. Il principio su cui si fonda la dinamica dei fluidi.

questo fa seguire un secondo enunciato, riportato in *Fig. 12*, che consiste nell'applicazione del principio generale della Dinamica al caso dei fluidi.

Il secondo capitolo è dedicato a una serie di problemi relativi alla dinamica dei fluidi incomprimibili in vasi a pareti rigide, prendendo in considerazione l'assenza o la presenza di peso, il flusso attraverso aperture praticate nelle pareti, il caso di flusso continuo e quello della separazione del fluido in diverse parti, in cui entra in causa il fenomeno dell'aderenza tra le particelle del fluido.

Più interessante è il capitolo terzo, dedicato al confronto con gli studi precedenti di Mac Laurin e di Jean Bernoulli (1667-1748). A tal fine D'Alembert espone brevemente le loro tesi, poi dedica diverse pagine a un commento critico. Sarebbe interessante sviluppare più in profondità questo argomento, ma ciò richiederebbe uno spazio alquanto ampio.

Nel capitolo quarto D'Alembert passa a considerare la dinamica dei fluidi comprimibili in vasi o tubi rigidi. Le ultime pagine del capitolo contengono una breve discussione del problema della propagazione del suono. Dopo un breve richiamo alle teorie di Newton e di Eulero, che peraltro conducono a risultati diversi, il centro della discussione diventa la teoria di di Jean Bernoulli figlio (1710-1790). L'atteggiamento di D'Alembert è alquanto critico: egli considera la teoria di Bernoulli come sostanzialmente priva di giustificazioni. Non si parla qui delle ricerche sulla corda vibrante svolte da D'Alembert stesso, ma presentate qualche anno dopo la pubblicazione del trattato sui fluidi [7].

Infine, il terzo libro del trattato affronta l'argomento ben più complesso della resistenza dei fluidi al movimento dei corpi.

THEORÊME II.

84. Les mêmes ſuppoſitions étant faites que dans le Theorême précedent, ſoient en général les viteſſes des différentes tranches du Fluide dans un même inſtant, repréſentées par l'indéterminée v. *Imaginons que* d v *ſoit l'incrément de* v *dans l'inſtant ſuivant, cette quantité* d v *étant différente pour les différentes tranches, poſitive pour les unes, & négative pour les autres ; en un mot, que* v $\mp$ d v, *exprime la viteſſe de chaque tranche lorſqu'elle prend la place de celle qui eſt immédiatement au-deſſous ; je dis que ſi chaque tranche étoit ſuppoſée tendre à ſe mouvoir avec la ſeule viteſſe infiniment petite* $\pm$ d v, *le Fluide reſteroit en équilibre.*

Fig. 12. L'applicazione del principio della Dinamica al caso dei fluidi.

4. Le opere di Astronomia

I tre volumi delle *Recherches sur differens points importans du Système du Monde* sono dedicati alla discussione di problemi di astronomia, e rappresentano solo una parte delle ricerche svolte da D'Alembert, in quanto affiancano e in parte riassumono o aggiornano il contenuto di diverse memorie. Il lavoro di D'Alembert in questo campo è considerevole, soprattutto se si tiene conto delle difficoltà tecniche dovute alla lunghezza e alla complessità dei calcoli richiesti. Qui mi limiterò a richiamare tre argomenti particolarmente studiati a quel tempo, e rimasti oggetto di lunghe indagini anche in tempi successivi.

(i) Il moto di precessione degli equinozi e di nutazione dell'asse terrestre, connesso col problema della forma della Terra.
(ii) Il moto della Luna.
(iii) Le perturbazioni dei moti planetari.

La discussione che segue è necessariamente sintetica: per un'esposizione esauriente occorrerebbero ore e ore – e non basterebbe un intero libro. Vale comunque un'osservazione di carattere generale. Come nel caso della Meccanica, le idee sviluppate da D'Alembert hanno talvolta fatto scuola sul modo di impostare i problemi. Non così invece per l'aspetto tecnico: i metodi analitici sviluppati qualche decennio dopo da Lagrange hanno ridotto in modo sostanziale le difficoltà del calcolo, e hanno soppiantato quelli di D'Alembert.

4.1 Il contesto storico

Già l'Astronomia antica si era occupata delle irregolarità dei moti planetari, solitamente chiamati *ineguaglianze* (traduco così il termine latino *inæqualitas*, inteso come mancanza di uniformità). Qui è necessaria una premessa, seguita dal riassunto sintetico di alcuni fatti.

Il lettore osserverà che nel paragrafo vi sono molte indicazioni quantitative: il ciclo delle eclissi valutato in 18,6 anni; la precessione degli equinozi di circa 50″ all'anno e periodo circa 26000 anni e così via. Comprendere il lavoro di Newton e dei suoi successori evitando dati tecnici di quel genere è praticamente impossibile. Viene però spontaneo chiedersi come si possano misurare con precisione archi così piccoli o periodi così lunghi. Ho raccolto in appendice A una serie di informazioni che possono essere d'aiuto per un lettore non particolarmente esperto di Astronomia; un lettore esperto dovrebbe semplicemente ignorare l'appendice.

Veniamo ai fatti. Nel sistema geocentrico generalmente adottato dall'Astronomia antica e codificato da Tolomeo le orbite dei Pianeti vengono descritte mediante cerchi, eccentrici, epicicli (equivalenti alle nostre serie di Fourier) ed equanti. Tutto quell'armamentario geometrico era necessario per descrivere le irregolarità o ineguaglianze note: la non uniformità nel tempo del moto intorno alla Terra; le variazioni del diametro apparente del Sole e della Luna; le variazioni della luminostà dei Pianeti; la maggior durata della stagione estiva rispetto a quella invernale (nell'emisfero nord); le variazioni in latitudine; i moti retrogradi dei Pianeti. Questi fenomeni trovano una spiegazione soddisfacente nell'ambito del sistema eliocentrico come elaborato da Copernico, difeso da Galileo e accettato da Keplero e Newton.

Il modello Kepleriano, almeno nelle intenzioni, rimuove tutto l'armamentario geometrico di Tolomeo e Copernico e lo sostituisce con le ellissi. Ma la perfezione di quel modello si rivela ben presto illusoria: è un'approssimazione molto elegante della realtà, ma solo un'approssimazione. Lo stesso Keplero si accorge che restano delle ineguaglianze che il suo modello non riesce a descrivere; egli stesso conia il termine *equazioni secolari* che nelle sue intenzioni dovrebbero tener conto della irregolarità osservate, ma lascia ai posteri il compito di determinare quelle equazioni.

Alle ineguaglianze osservate da Keplero si aggiungono altri fenomeni: alcuni noti da tempo quali il ciclo delle eclissi e la precessione degli equinozi; altri frutto di nuove scoperte dovute anche alla disponibilità di strumenti di osservazione sempre più precisi e potenti. Il problema che si pone nella prima metà del secolo XVIII è se la teoria della gravitazione proposta da Newton possa rendere conto complessivamente di tutti quei fenomeni.

Torniamo all'opera di D'Alembert. Si deve tener conto che nella prima metà del XVIII secolo la teoria di Newton non era universalmente accettata. I principali antagonisti di D'Alembert in quegli anni erano Eulero a Berlino e Clairaut a Parigi. Eulero accettò la teoria newtoniana dopo qualche esitazione. Alexis Clairaut (1713-1765), egli pure membro dell'Académie, almeno in un primo tempo sostenne apertamente la tesi che la legge della gravitazione di Newton non fosse esatta, e che vi si dovessero apportare delle correzioni; proponeva di aggiungere alla forza termini dipendenti inversamente da potenze della distanza superiori a due (si veda [1], pag. 338). Per inciso, non sembra che i rapporti tra D'Alembert e Clairaut andassero al di là del reciproco rispetto che faceva da schermo a una mal dissimulata rivalità.

D'Alembert si schiera con i sostenitori di Newton, rifiutando le tesi cartesiane, ma per farlo intende sviluppare metodi di calcolo che forniscano risultati il più esatti possibile: egli ha ben presente il fatto che la prova della correttezza della teoria newtoniana sta nel rendere conto di tutti i fenomeni astronomici noti. A tal fine espone in modo dettagliato la teoria di Newton, ove disponibile, pur senza risparmiare le critiche; poi passa ad esporre le teorie che lui stesso ha elaborato. La conclusione finale è totalmente a favore di Newton, e dunque contraria a Cartesio (a cui peraltro dedica ben poco spazio, e solo per dire che si tratta di una teoria in fase di estinzione).

4.2 La precessione degli equinozi e la nutazione dell'asse terrestre

Il fenomeno della *precessione degli equinozi* è stato scoperto da Ipparco di Nicea, intorno al 150 aC. Egli notò una differenza sistematica tra le sue misure delle longitudini delle stelle e i dati tramandati nelle tavole di astronomi dei due secoli precedenti, e la attribuì a uno spostamento regolare del punto equinoziale dell'orbita del Sole, valutato da lui in circa 48″ all'anno.[1] In altre parole, Ipparco introduce l'ipotesi che l'intero cielo delle stelle fisse ruoti molto lentamente da occidente verso oriente attorno alla perpendicolare all'eclittica; ciò è del tutto coerente con l'ipotesi

[1] L'arco è molto piccolo inosservabile a occhio nudo, ma in un paio di secoli lo spostamento totale ammonta a circa 2 gradi e mezzo: una quantità ben osservabile visualmente perché corrisponde a circa 5 volte il diametro apparente della Luna.

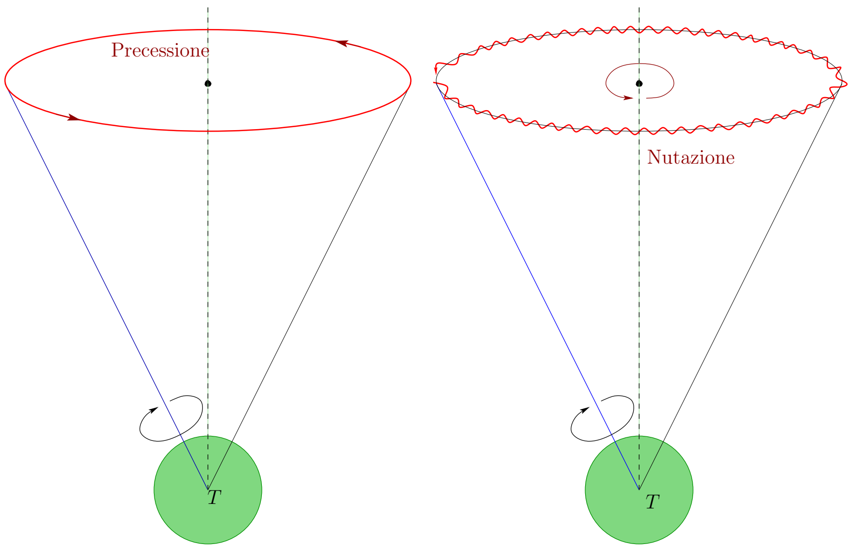


Fig. 13. I moti di precessione e di nutazione dell'asse terrestre.

geocentrica, secondo la quale la Terra è fissa. Una volta accettato il sistema eliocentrico, e quindi il movimento della Terra, il fenomeno viene spiegato ammettendo che le stelle restino fisse, e che l'asse di rotazione della Terra descriva una superficie conica attorno all'asse perpendicolare all'eclittica girando in senso contrario alla rotazione della Terra, come rappresentato nel quadro sinistro di *Fig. 13*. I dati astronomici disponibili a quei tempi stimavano la velocità in circa 50″ all'anno, corrispondenti a un periodo di circa 26 000 anni; una stima non troppo diversa da quella di Ipparco.

Il fenomeno della *nutazione*, scoperto da James Bradley (1693-1762) e comunicato nel 1747 al termine di un periodo ventennale di osservazioni che copre un'intera rivoluzione del nodo lunare, consiste in una oscillazione dell'inclinazione dell'asse terrestre intorno al valore medio di circa 23°30′, come rappresentato nel quadro destro di *Fig. 13*. Secondo la descrizione di Bradley il polo terrestre descrive una piccola ellisse intorno alla sua posizione media dovuta alla precessione; egli valuta gli assi dell'ellisse rispettivamente in 18″ e 16″, e il periodo coincide con quello della rivoluzione del nodo lunare, pari a circa 18,6 anni. La comunicazione originale è pubblicata in [1]. Qui la quantità osservata è decisamente piccola: le misure di Bradley sono state effettuate mediante gli strumenti

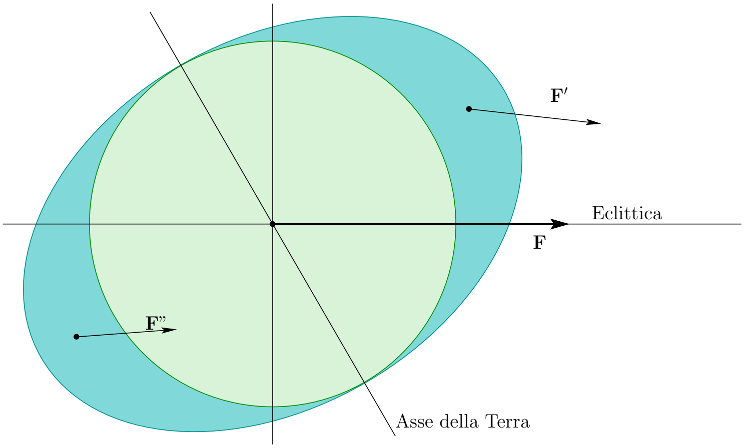


Fig. 14. L'azione gravitazionale del Sole sulla Terra, rappresentata come uno sferoide schiacciato schematizzato in Fig. 14. La parte sferica centrale, essendo simmetrica, non comporta nessuna azione sulla direzione dell'asse: ciò è stato dimostrato da Newton. La parte che eccede la forma sferica, qui rappresentata dalle due lunette, è rilevante: la composizione delle forze rappresentate non è nulla a causa della differenza nella distanza delle lunette dal Sole. Ne risulta un'azione che tende a raddrizzare l'asse. Per la Luna valgono considerazioni simili, a cui si aggiunge l'inclinazione dell'orbita lunare che introduce una dipendenza periodica della forza dal tempo.

più sofisticati a sua disposizione, in particolare il telescopio da lui stesso costruito.

In termini meccanici si inquadra il problema nell'ambito della dinamica del *corpo rigido*, che oggi viene affrontato partendo dalle equazioni di Eulero, pubblicate dopo i trattati di D'Alembert. Occorre tener conto delle forze esercitate dal Sole e dalla Luna: D'Alembert porta degli argomenti a favore della tesi che le eventuali azioni di altri Pianeti, ad esempio Giove, siano troppo piccole per essere realmente influenti.

Il primo tentativo di spiegare in termini meccanici il fenomeno della precessione è dovuto a Newton, il cui lavoro viene illustrato da D'Alembert in modo dettagliato. Le cause fisiche vengono identificate nell'azione gravitazionale del Sole e della Luna sulla Terra, e nella forma particolare di quest'ultima. Se la Terra fosse una sfera perfetta, formata da strati sferici omogenei, allora l'azione gravitazionale sarebbe perfettamente simmetrica e potrebbe ricondursi a quella agente su un punto. A rigore, questo sarebbe vero se anche il Sole e la Luna avessero la stessa struttura a strati sferici omogenei, ipotesi tacitamente ammessa. In realtà la Terra è uno sferoide schiacciato ai poli che ruota intorno a un asse inclinato rispetto all'eclittica; ciò introduce una asimmetria nell'azione gravitazionale degli altri corpi, con una tendenza a diminuire l'inclinazione dell'asse di rotazione. Ne risulta un effetto giroscopico, per cui l'asse della Terra ruota intorno all'asse dell'eclittica. Il fenomeno è del tutto analogo al moto di precessione della trottola quando il suo asse di rotazione risulta inclinato rispetto alla verticale.

La difficoltà è duplice. Dal punto di vista matematico occorre calcolare la risultante dell'azione gravitazionale sulla parte eccedente la sfera, come rappresentata in *Fig. 14*: il calcolo integrale non era ancora sviluppato a sufficienza. Dal punto di vista fisico il problema è la forma della Terra e la sua struttura: non c'erano dati certi né sulla composizione interna né sullo schiacciamento effettivo; quest'ultimo era stato valutato misurando la lunghezza del grado di meridiano in diversi punti del globo – il metodo ideato da Eratostene.

La via d'uscita escogitata da Newton consiste nel sostituire allo sferoide una sfera omogenea, almeno a strati, circondata da un anello omogeneo disposto intorno all'equatore. In tal modo la sfera centrale può ridursi a un punto, e l'anello viene discretizzato, come composto da tante piccole lune. Ciò gli consente di calcolare la forza senza ricorrere al calcolo integrale. Valutando in tal modo sia l'azione del Sole che quella della Luna Newton trova una precessione di circa 50″ all'anno, in buon accordo con le osservazioni. Ma qui D'Alembert assume un atteggiamento molto critico: *"Une conformité si exacte entre le calcul et le Phénomène, paroit sans doute une des proeuves les plus favorables au systême de l'Attraction. Mais le conséquences qui en résultent perdront de leur force, si quelques-unes des propositions qui servent de base à la Théorie de M. Newton sont, ou douteuses, ou peu exactes. J'oserois dire que j'ai tout lieu de le croire, si je ne savois avec quelle retenue, & pour ainsi dire, avec quelle superstition on doit juger les grands hommes".* Tra le ipotesi di Newton vi sono certamente l'omogeneità della Terra e la stima dello schiacciamento, per il quale assume una differenza di $\frac{1}{230}$ tra gli assi; inoltre egli assegna il valore 4:1 al rapporto tra le forze esercitate dalla Luna e dal Sole. D'Alembert osserva che le misure più recenti danno una differenza di $\frac{1}{178}$ tra gli assi, mentre Bernoulli stima in 5:2 il rapporto tra le forze di Luna e Sole. I risultati del calcolo sono ben diversi. Insomma, per dirla in breve, D'Alembert lascia affiorare il sospetto che Newton abbia aggiustato i parametri per far tornare il risultato, dopodiché in qualche modo lo assolve: *"D'ailleurs, est il surprenant qu'un Philosophe auquel nous devons un si grand nombre de découvertes, ait il laissé quelques pas à faire dans la carrière immense où il a tant avancé?"*

Quanto alla nutazione, il precedente è costituito dalla teoria sviluppata da Bradley sulla base di tavole fornitegli da John Machin (1686-1751), ma apparentemente non pubblicate. Del resto Bradley comunica i risultati delle sue osservazioni e traccia le linee di una teoria, ma senza svilupparla in modo completo.

Le difficoltà principali sono due. La prima è che sarebbe necessario separare in qualche modo l'azione del Sole da quella della Luna – operazione tentata da Newton confrontando gli effetti di marea. La seconda, a cui ho già accennato, è che un calcolo attendibile delle azioni gravitazionali del Sole e della Luna non può prescindere dalla conoscenza della forma e della struttura interna della Terra – informazioni non disponibili o poco attendibili.

Il primo problema è in qualche modo superabile, perché la nutazione è dovuta alla sola azione della Luna; ciò è confermato dalle osservazioni, perché il periodo della nutazione coincide con quello della rivoluzione del nodo lunare. In tal modo si può valutare il rapporto tra le due azioni, che risulta essere indipendente dalle ipotesi sulla struttura interna della Terra. D'Alembert valuta quel rapporto in 7/3.

Il secondo problema è decisamente più complesso. Le ipotesi sulla struttura interna della Terra, fa notare D'Alembert, possono diventare infinite. Egli assume che la Terra sia formata da una serie di strati ellittici omogenei, e svolge un calcolo decisamente complesso: gli strumenti puramente geometrici e il continuo ricorso alla scomposizione delle varie azioni qui giocano un ruolo di primo piano, rendendo l'esposizione alquanto ostica per chi, come noi, abbia assimilato i metodi analitici inaugurati da Eulero e Lagrange e abbia perso familiarità con la geometria della riga e del compasso. Una volta calcolati separatamente i due movimenti egli cerca di determinare la densità, la forma e lo schiacciamento dei vari strati della Terra, analizzando diverse ipotesi e cercando l'accordo con le osservazioni. Qui emergono alcune curiosità; ne segnalo una. Assumendo che i vari strati della Terra siano solidi, egli conclude che per giustificare i 50″ all'anno della precessione lo schiacciamento dovrebbe essere di molto inferiore a quello osservato. Trova invece un accordo sensibilmente migliore assumendo che la Terra abbia un nucleo solido circondato da uno strato fluido. Più interessante è il fatto che si riesca a trovare un buon accordo anche con l'entità della nutazione. Come ho detto, Bradley parla di una piccola ellisse con assi rispettivamente di 18″ e 16″, ma segnala che mentre l'oscillazione di 18″ rispetto all'inclinazione media è ben stabilita dalle osservazioni, la stima di 16″ per l'asse minore non è altrettanto certa; proprio qui sollecita l'intervento del calcolo teorico, senza svolgerlo. D'Alembert giustifica i 18″ dell'asse maggiore, e calcola un rapporto 3/4 per l'asse minore, corrispondente a circa 12″; una piccola differenza compatibile con la precisione degli strumenti dell'epoca.

4.3 Il moto della Luna

Storicamente la teoria del moto della Luna ha sempre richiesto una trattazione separata rispetto a quella dei moti planetari. Il suo moto presenta diverse *ineguaglianze*, e il calcolo teorico della sua orbita è tutt'altro che agevole. D'altra parte gli sviluppi della teoria nei due secoli successivi sono tali e tanti che i metodi di D'Alembert possono considerarsi ampiamente superati.

Le ricerche di D'Alembert sono esposte nella prima parte, volume primo delle *Recherches sur le Système du Monde*. Le ineguaglianze da giustificare sono segnalate nell'opera di Newton, e i dati osservativi sono essenzialmente quelli di Tycho Brahe.

i. La *variazione*, scoperta da Tycho Brahe: il moto in longitudine della Luna non è uniforme, ma è soggetto a variazioni periodiche che arrivano fino a 35′ agli ottanti; una differenza pari al diametro apparente della Luna, e quindi ben osservabile.
ii. Il moto retrogrado dei nodi: il piano dell'orbita lunare è inclinato mediamente di poco più 5° rispetto all'eclittica, ma è soggetto a un movimento retrogrado di precessione: il nodo (l'intersezione tra il piano dell'eclittica e quello dell'orbita lunare) compie una rotazione di un angolo giro in circa 223 lunazioni, ovvero in 18,6 anni, corrispondente a circa 19 gradi in un anno. Si tratta del *periodo draconico, o draconitico*, già noto agli astronomi babilonesi.
iii. L'ineguaglianza nel moto dei nodi: la precessione non è uniforme; si hanno deviazioni di circa 1° 30′.
iv. Le oscillazioni dell'inclinazione: l'inclinazione dell'orbita lunare, che come ho già detto è in media poco più di 5°, è soggetta a un'oscillazione periodica di circa 8′.
v. La precessione dell'apogeo: la linea degli apsidi della Luna compie una rivoluzione di un angolo giro in poco meno di 9 anni.

Anche qui D'Alembert si propone di sviluppare una teoria più rigorosa rispetto a quella di Newton, che egli giudica insufficiente – pur sempre moderando le sue critiche con un elogio a quel grande uomo che merita tutta l'ammirazione dovuta a un maestro.

Lo schema seguito da D'Alembert non differisce sostanzialmente da quello adottato dal suo contemporaneo (e concorrente) Clairaut. Si tratta di calcolare l'orbita della Luna sotto l'azione gravitazionale della Terra e del Sole. In altre parole, è il *problema dei tre corpi*, un classico della Meccanica Celeste accanto a quello della dinamica del corpo rigido. A dire il vero, si dovrebbe tener conto dell'azione di tutti i Pianeti, ma D'Alembert mostra che quella di Giove è 64000 volte più piccola di quella del Sole, e dunque la si può trascurare; lo stesso vale, a maggior ragione, per i Pianeti restanti.

La scrittura delle equazioni è operazione alquanto laboriosa: tutto il calcolo è svolto scomponendo le forze che la Terra e il Sole esercitano sulla Luna in due componenti, una nella direzione Terra-Sole, l'altra nella direzione Luna-Terra. La prima componente obbliga la Luna a seguire la Terra nella sua orbita; la seconda è causa del moto della Luna rispetto alla Terra, e delle deviazioni dal moto ellittico. È un calcolo che possiamo definire abbastanza spontaneo, e tutto sommato non particolarmente complesso se si introduce il baricentro del sistema Terra Luna e se si fa uso di coordinate e degli strumenti del calcolo vettoriale. La difficoltà è dovuta soprattutto alla mancanza di quegli strumenti, il che rende necessario il ricorso a tecniche puramente geometriche e a figure di non facile lettura. Ma questo, a conti fatti, non è un ostacolo enorme: in un modo o nell'altro, alla fine si ottengono delle equazioni differenziali per le quantità che si vogliono calcolare.

Le complicazioni più gravi sorgono nel momento in cui si vogliano risolvere le equazioni ottenute: è questo il vero problema della Meccanica Celeste, ancor oggi oggetto di studio e in qualche senso irresolubile, come ci ha spiegato Poincaré un secolo e mezzo dopo D'Alembert.

La difficoltà è duplice. In primo luogo si deve necessariamente cercare una soluzione approssimata, richiedendo che sia il più vicina possibile a quella esatta, che ci è sconosciuta. In secondo luogo, e questo è ancor più difficile, occorre separare i termini che devono essere necessariamente mantenuti da quelli molto piccoli, e dunque trascurabili.

Vediamo in breve il procedimento, cercando di mettere in evidenza i punti rilevanti. In prima approssimazione si assume che l'orbita della Luna sia circolare; poi si cercano delle correzioni periodiche. Si ripropone in pratica, in termini più sofisticati, il metodo degli epicicli dell'astronomia antica – ma questo D'Alembert non lo dice e forse neppure lo pensa. In termini moderni, possiamo ben dire che cerchiamo uno sviluppo in serie trigonometriche del tempo – ma la tecnica generale necessaria non è nota a D'Alembert, e verrà sviluppata anni dopo da Lagrange. In termini alquanto rozzi, e anche un po' irriverenti, possiamo dire che D'Alembert costruisce degli sviluppi in serie trigonometriche facendo ricorso a metodi artigianali – il che mostra quanto fosse paziente, intraprendente e acuto nelle sue ricerche. In ogni caso, egli arriva a stabilire che ai fini del calcolo si debbano risolvere delle equazioni che scrive nella forma

$$\mathrm{dd}t + N^2 t\,\mathrm{d}z^2 + M\,\mathrm{d}z^2 = 0\,,$$

dove N^2 è un coefficiente costante e $M(z)$ è una funzione di z; si chiede di trovare la soluzione $t(z)$. Qui si vede quanto possa essere delicato il problema di selezionare i termini che non sono trascurabili; ma qui devo inserire un breve calcolo.

In termini a noi più familiari, e cambiando i simboli, possiamo scrivere l'equazione nella forma $\ddot{x}+\omega^2 x = f(t)$, con ω costante e $f(t)$ una funzione assegnata. In altre parole, abbiamo a che fare col problema ben noto delle oscillazioni forzate. Evitando una discussione generale, del resto non necessaria in questo contesto, prendiamo il caso in cui sia $f(t) = a\cos\nu t$; in effetti il calcolo di D'Alembert richiede proprio di risolvere equazioni di di questo genere quando $f(t)$ sia somma di termini periodici. Tutto dunque si concentra sulla soluzione dell'equazione

$$\ddot{x} + \omega^2 x = a\cos\nu t\,, \tag{3}$$

che nel caso $\nu \neq \omega$ ammette la soluzione particolare

$$x(t) = \frac{a}{\omega^2 - \nu^2}\cos\nu t\,. \tag{4}$$

Qui si vede con chiarezza che un termine che abbia un coefficiente a piccolo può diventare molto più grande dopo l'integrazione, se ω e ν sono molto vicini. Ancor peggiore è il caso in cui $\nu = \pm\omega$, perché si dovrà includere nella soluzione un termine $t\sin t$, con una dipendenza non periodica da t. Nel linguaggio adottato da D'Alembert questi termini contengono un *arc de cercle*; per gli astronomi sono i cosiddetti *termini secolari* di cui parlerò più avanti, nel prossimo paragrafo. In compenso, se $|\nu| - |\omega|$ è molto grande allora l'integrazione dell'equazione riduce sensibilmente la taglia del coefficiente; questo era già stato osservato da Eulero, che da qui concludeva a favore di una convergenza abbastanza rapida delle serie trovate col procedimento di approssimazioni successive. Una conclusione, quest'ultima, da prendere con molta cautela: dopo Poincaré sappiamo che quelle serie hanno tipicamente un carattere asintotico, e non sono convergenti nel senso rigoroso della teoria di Cauchy. Ma questo né Eulero né i suoi contemporanei potevano saperlo.

Si vede dunque che nel selezionare i termini di cui tener conto non basta guardare il coefficiente che compare nell'equazione: è indispensabile controllare che quel coefficiente resti piccolo anche dopo l'integrazione. Il ricorso a un procedimento di approssimazioni successive introduce una complicazione ulteriore: la soluzione ottenuta in prima approssimazione deve essere risostituita nell'equazione, e poi le funzioni ottenute devono essere sviluppate nuovamente in serie trigonometriche che rappresentano la nuova funzione $f(t)$ nell'equazione. Tali termini devono a lora volta essere sottoposti a integrazione, e cosí via. Tutto ciò comporta che un termine che a prima vista sembra trascurabile possa produrre contributi rilevanti più avanti, nel corso del procedimento: una propagazione difficile da controllare. Si pongono dunque due domande: *quali sono i termini effettivamente trascurabili? e fin dove deve essere portato avanti il procedimento di approssimazioni successive?* Due domande che sono ancora attuali, e la teoria del moto della Luna mette subito in evidenza quanto esse siano rilevanti.

Il problema si presenta in modo inequivocabile nello studio della precessione dell'apogeo lunare. In questa occasione D'Alembert dà un resoconto dettagliato dei fatti, che riassumo se non altro perché ci offre uno spaccato delle relazioni tra due protagonisti di quell'epoca. Il 15 novembre 1747 Clairaut presenta all'Académie una memoria in cui svolge il calcolo della precessione, ma trova un risultato che è circa la metà di quella osservata. La sua conclusione è che si debba correggere la legge di gravitazione newtoniana. La notizia suscita un certo scalpore nell'ambiente scientifico: non dimentichiamo che in quel periodo la gravitazione di Newton era ancora oggetto di discussione. D'Alembert, avendo svolto indipendentemente lo stesso calcolo, ha trovato un risultato simile su cui però nutre qualche dubbio, e infatti non lo ha pubblicato. Rivela pure di aver ricevuto una lettera in cui Maupertuis gli comunica che anche Eulero era incappato in precedenza nello stesso problema. Sta di fatto che Clairaut insiste perché la sua memoria venga pubblicata rapidamente, nel volume delle memorie del 1745. D'Alembert, per tutta risposta, modifica il testo di una memoria sui moti planetari presentata il 23 giugno 1747, aggiungendo il calcolo per l'apogeo della Luna. In seguito chiede che il testo modificato venga pubblicato contemporaneamente alla memoria di Clairaut, anche se non è stato comunicato a una seduta dell'Académie. Così avviene infatti: la memoria di Clairaut si trova alle pagg. 329-364, seguita da quella di D'Alembert alle pagg. 365-390. Ambedue gli autori hanno aggiunto qualche osservazione per precisare che nessuno era a conoscenza del lavoro svolto contemporaneamente dall'altro. In calce alla memoria di D'Alembert si trova una postilla assolutoria: *"Quoique les deux Mémoires précédens de Mrs Clairaut & D'Alembert, n'aient été lûs à l'Académie que dans le courant de l'année 1747, on a jugé à propos de les publier dans le volume de cette année."*

C'è un seguito, sempre narrato da D'Alembert. Il 17 maggio 1749 Clairaut comunica all'Académie che avendo ripreso il calcolo svolto nella memoria presentata in precedenza ha trovato risultati in accordo con le osservazioni (anche di questo si trova traccia nelle ultime pagine del volume di memorie del 1745). D'Alembert viene a sapere, dallo stesso Clairaut, che il risultato è ottenuto migliorando l'approssimazione, e in particolare tenendo conto di certi termini che in un primo tempo erano stati trascurati. Più avanti, avendo svolto il calcolo con le correzioni suggerite da Clairaut, egli verifica che ancora non basta: il valore ottenuto è inferiore di circa 30′ al dato osservato per l'intera rivoluzione dell'apogeo. Quindi incrementa ancora l'ordine di approssimazione, calcolando altri termini, e finalmente ottiene un risultato che considera soddisfacente.

Al di là di tutte le vicissitudini che ho narrato, resta un'osservazione fatta dallo stesso D'Alembert: *la scelta del grado di approssimazione può avere effetti rilevanti sul risultato; d'altra parte non c'è un criterio semplice per stabilire dove fermarsi, salvo il confronto con le osservazioni.*

La conclusione finale di D'Alembert è che le piccole differenze riscontrate tra il calcolo teorico e le osservazioni non mettono in discussione la legge di gravitazione: a suo parere, eventuali piccole differenze residue possono essere eliminate includendo altri termini trigonometrici nel calcolo, così da migliorare ulteriormente il risultato; le serie calcolate, osserva, convergono abbastanza bene, come sosteneva anche Eulero. Egli dunque adotta senz'altro il modello newtoniano. Pure Clairaut, da parte sua, si convince della correttezza del modello, e rinuncia a introdurre le correzioni alla legge di gravità che aveva proposto in precedenza; il tutto non senza uno scambio polemico con Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707-1788), riportato alle pagine 577-587 del volume delle memorie del 1745.

Recherche de l'orbite des Planetes principales dans le ſyſtême de l'Attraction.

Fig. 15. L'indice del secondo volume del Système du monde, dedicato ai moti planetari.

Application de notre Méthode à la recherche des orbites des Planetes principales, en ayant égard à leur action mutuelle.

209. IL y a trois différentes causes qui peuvent altérer le mouvement des Planetes principales; savoir 1°. l'Attraction mutuelle de ces Planetes, dont l'effet se fait appercevoir d'autant plus sensiblement qu'elles sont plus grosses & plus proches les unes des autres, comme il arrive dans Saturne & dans Jupiter. 2°. L'Attraction que ces mêmes Planetes exercent sur le Soleil, & qui empêchant cet Astre d'être absolument immobile, fait qu'indépendamment de toute autre action, elles ne décrivent point autour de lui des orbites exactement Elliptiques. 3°. Enfin l'Attraction que les Satellites d'une Planete peuvent exercer sur elle, comme celle que la Lune exerce sur la Terre; action qui peut être plus ou moins sensible suivant la masse des Satellites.

Fig. 16. L'impostazione del problema dei moti planetari.

Alla fine del trattato D'Alembert pubblica delle nuove tavole per il calcolo delle posizioni della Luna, e lascia agli astronomi il compito di verificarne l'attendibilità, anche confrontandole con altre tavole allora disponibili.

Il problema del calcolo dell'orbita lunare viene ripreso nella terza parte, libro quarto delle *Récherches sur le Systême du monde*. Si tratta di correzioni e miglioramenti del calcolo svolto nel libro primo, sui quali non mi dilungo.

4.4 I moti planetari

La questione dei moti planetari è studiata ampiamente nella parte seconda, libro secondo della *Recherches*; l'indice è riportato in *Fig. 15*. Il titolo dichiara apertamente la completa adesione dell'autore al modello newtoniano: *Recherche de l'orbite des planetes pincipales dans le systême de l'attraction.* Il primo problema che si presenta è, ovviamente, la scrittura delle equazioni: occorre tener conto dell'azione di ciascun corpo sugli altri, come descritto nel brano riportato in *Fig. 16*. Si noti che D'Alembert, coerentemente con la sua impostazione generale della Meccanica, non fa uso del concetto di forza, e di conseguenza neppure del principio di azione e reazione; inoltre l'azione di un corpo su un altro viene descritta in termini della sola *accelerazione* del secondo, non in termini del prodotto massa per accelerazione come nello schema newtoniano. Ciò rende necessaria qualche acrobazia nel tener conto dell'azione di un Pianeta sul Sole; D'Alembert rimuove quell'azione trasportandola indietro in senso contrario sul Pianeta, il che aggiunge qualche complicazione tecnica.

Il problema posto da D'Alembert può considerarsi come un ampliamento delle sue ricerche sull'orbita della Luna. Mentre in quel caso la sua attenzione si concentrava sul moto della Luna rispetto alla Terra, considerata quest'ultima come fissa, qui egli intende studiare quello che chiameremmo *problema generale dei tre corpi*, il che include anche le perturbazioni dell'orbita di un Pianeta – qui la Terra – dovuta alla presenza di un satellite.

I primi due capitoli sono dedicati al caso Terra-Luna-Sole. Il risultato principale è che il baricentro del sistema formato dalla Terra e dalla Luna si muove su un'ellisse intorno al Sole, sicché lo studio precedente del moto lunare rispetto alla Terra risulta giustificato. Nel seguito D'Alembert estende al caso dei Pianeti maggiori le tecniche di approssimazione che aveva sviluppato per la teoria della Luna. Qui è interessante vedere il contesto storico, prestando qualche attenzione al punto di vista di D'Alembert come egli stesso lo espone.

Le *ineguaglianze* dei Pianeti, ovvero le deviazioni dei moti planetari rispetto alle orbite ellittiche, erano già state osservate da Keplero [15], che ne aveva fatto cenno in alcune lettere, riferendosi in particolare al caso di Giove e Saturno. Newton, a sua volta, aveva osservato nei *Principia* che l'azione di Giove su Saturno poteva avere effetti rilevanti. All'inizio del secolo XVIII di questi fenomeni si sapeva abbastanza poco, anche perché Keplero, pur avendo promesso e preparato una prima versione di un opuscolo sull'argomento, non l'aveva pubblicata [8].

Nella prima metà del secolo XVIII l'accumulo di osservazioni e la disponibilità dei telescopi aveva confermato l'esistenza di ineguaglianze. Si poneva dunque in modo sempre più pressante il problema di stabilire se la teoria di Newton potesse renderne ragione. La questione non era così semplice: era indispensabile avere a disposizione sia un calcolo teorico attendibile, sia delle osservazioni sufficientemente precise che fornissero una valutazione quantitativa affidabile dell'entità delle deviazioni osservate. Ora, né l'una né l'altra cosa erano effettivamente disponibili. I metodi dell'Analisi erano ancora in fase di sviluppo; le osservazioni, pur aumentate in modo considerevole sia in numero che in precisione, erano ancora troppo scarse, perché la determinazione di quantità che riguardano moti secolari richiede osservazioni distribuite su un arco temporale di secoli. Era dunque necessario combinare in modo efficace i dati osservativi con le previsioni teoriche: questo era ben chiaro a D'Alembert.

Date le premesse, non c'è ragione di stupirsi se il caso studiato con maggiore attenzione è quello di Saturno. Secondo D'Alembert questi sono i fatti:

(i) il moto di Saturno sembra rallentare di secolo in secolo;
(ii) inoltre si osserva una irregolarità che dipende dalla configurazione di Saturno rispetto a Giove.

In sintesi, l'ineguaglianza di Saturno presenta una variazione proporzionale al tempo, a cui si sovrappone una variazione periodica. Questi fatti si deducono dall'analisi di coppie di osservazioni distanziate di 59 anni e un giorno (corrispondenti approssimativamente a 5 orbite di Giove e 2 di Saturno): si confrontano i dati osservati con le previsioni del calcolo, e si osserva una deviazione proporzionale al tempo se si selezionano coppie che corrispondono alla stessa posizione relativa dei due Pianeti, mentre la variazione periodica caratterizza l'insieme di tutte le coppie e riflette l'oscillazione della distanza tra i due Pianeti. Qui l'attenzione è concentrata su Saturno, ma anche Giove è soggetto a ineguaglianze simili: il suo moto sembra accelerare in concomitanza col rallentamento di Saturno.

Dato il grande interesse della questione, l'Académie mette a bando tre premi per lo studio del problema, negli anni 1748, 1750 e 1752. Il primo e il terzo vengono attribuiti a Eulero; il secondo non viene assegnato. D'Alembert prende in esame in modo particolare la memoria di Eulero premiata nel 1748. In essa si mettono in evidenza tre ineguaglianze principali: due periodiche dipendenti dalla differenza tra gli angoli corrispondenti alle posizioni dei due Pianeti; la terza introduce una dipendenza temporale della forma $t \sin t$ nell'equazione del raggio, ed è un termine secolare o, come lo chiama D'Alembert, *un arc de cercle*. Su quest'ultimo egli concentra la sue attenzione, ritenendolo inaccettabile: a suo parere i termini secolari dovrebbero comparire solo nel movimento dell'afelio, in analogia a quello che accade per la Luna.

In termini più precisi, la soluzione secolare nasce dal fatto che nel procedimento di approssimazione si incappa proprio nell'equazione (3) con $\nu = \omega$. Ma D'Alembert osserva che quel termine è conseguenza dell'ipotesi, introdotta da Eulero, che gli afeli di Giove e Saturno siano fissi. Se si ammettesse un lento movimento degli afeli si otterrebbe invece un'equazione con $\nu = \omega + \alpha$ con α molto piccolo. La soluzione (4) corrispondente dipenderebbe periodicamente dal tempo come $\sin(\omega + \alpha)t$ con un coefficiente molto grande dell'ordine di $1/\alpha$, ma non conterrebbe più un termine secolare. Se poi si considerassero gli istanti di tempo per cui $\omega t = 2n\pi$, multiplo di 2π, allora si avrebbe un termine che si comporta come $\frac{\sin n\alpha}{\alpha}$, ossia un comportamento oscillante con grande ampiezza ma con periodo molto lungo. Qui ω rappresenta il moto medio di Saturno, sicché gli istanti considerati possono identificarsi col ritorno di quel Pianeta all'afelio, circa ogni 30 anni.

Purtroppo il valore di α dovrebbe essere fornito dalle osservazioni che, come ho già detto, coprono un arco temporale troppo breve; a D'Alembert non resta che avanzare qualche congettura. Ad esempio, supponendo $\frac{\alpha}{\omega} = \frac{40''}{360°}$ si dovrebbe osservare un'ineguaglianza crescente per un tempo $90 \times 30 \times 36$ anni, e poi una decrescita per un intervallo di tempo doppio; difficile verificarla con osservazioni distribuite su pochi decenni! Ad ogni modo il fatto interessante è che si possa attribuire la variazione secolare, apparentemente lineare nel tempo, a una perturbazione di lungo periodo. Non si può dire che l'enigma dell'ineguaglianza di Saturno sia stato risolto né da Eulero nelle sue memorie, né da D'Alembert nel suo trattato; ma si tratta comunque di riflessioni interessanti che costituiscono un passo utile.

5. Dopo D'Alembert

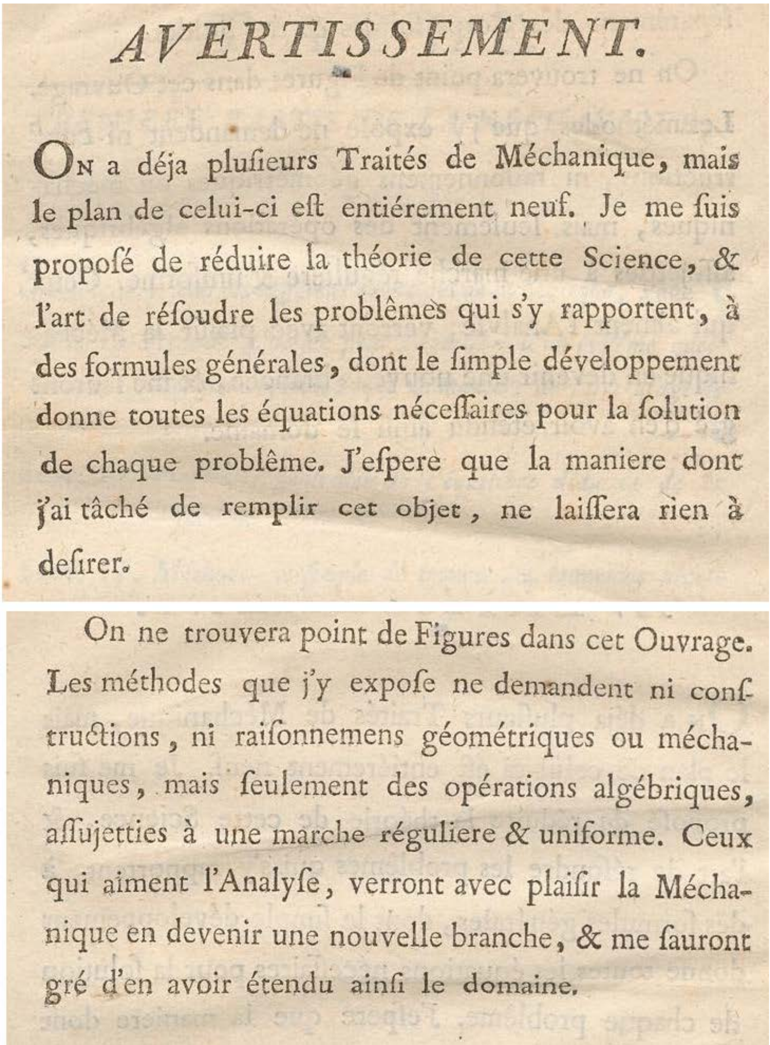
Credo sia interessante aggiungere a questa esposizione qualche breve nota sugli sviluppi successivi, in particolare quelli in qualche modo collegati alla *Dynamique* e alle ricerche astronomiche.

Cominciamo dalle ultime. Il problema dei moti planetari viene ripreso da Lagrange in una memoria presentata all'Académie il 13 dicembre 1774. Vi si trova una teoria completa per la precessione dei nodi e l'evoluzione delle inclinazioni delle orbite dei Pianeti [10]. Laplace, venuto a conoscenza della memoria di Lagrange, estende immediatamente il calcolo all'evoluzione dei perieli e delle eccentricità, e pochi mesi dopo presenta una sua memoria [13]. Curiosamente, la memoria di Laplace viene pubblicata qualche anno prima, ma i meriti di Lagrange vi sono pienamente riconosciuti. Comunque sia, la memoria di

Lagrange citata e due altre pubblicate successivamente introducono *ex novo* dei metodi analitici che diventano un paradigma di riferimento per i secoli successivi [11][12]. Quanto all'ineguaglianza di Giove e Saturno, per avere una soluzione soddisfacente bisogna attendere il 1785, quando Laplace presenta una sua memoria sull'argomento [14]. L'osservazione cruciale è che il rapporto tra i periodi dei due Pianeti è vicino a 5/2 ; la prossimità alla risonanza genera una perturbazione significativa con un periodo di circa 900 anni.

L'evoluzione della *Dynamique* è più interessante: ha lasciato una traccia profonda nei secoli successivi, perché l'impostazione di Lagrange è diventata di fatto lo standard per la maggior parte dei trattati di Meccanica, fino ai nostri giorni. Nel 1788 viene pubblicata la prima edizione della *Méchanique Analytique*. L'autore stesso afferma che si tratta di un'impostazione del tutto nuova rispetto a quelle tradizionali: lo si vede nel brano riportato in *Fig. 17*. A differenza di D'Alembert egli ripristina il concetto di forza. Inoltre, e questo è un punto cruciale, introduce l'uso di coordinate in forma generale – che noi oggi chiamiamo *coordinate generalizzate* o *Lagrangiane*. La trattazione analitica e la generalità del metodo semplificano in modo radicale la scrittura delle equazioni della Meccanica. Ma, come lo stesso Lagrange non manca di spiegare dettagliatamente, il punto di partenza è proprio quello che viene chiamato *Principio di D'Alembert*: si decompone la forza (anziché la velocità) in una componente distrutta dai vincoli e una seconda che è la sola capace di generare accelerazione. Il trattamento elegante ed efficace della geometria tramite il ricorso alle coordinate generalizzate elimina le costruzioni geometriche complesse che troviamo in D'Alembert. L'introduzione di quelle che noi chiamiamo *equazioni di Lagrange* semplifica in modo drastico la scrittura delle equazioni di moto. Tutto questo ha fatto del formalismo di Lagrange lo strumento principe per la trattazione di una vasta classe di problemi di Meccanica.

Si deve anche osservare che Lagrange, nella prima pagina del suo trattato, si proclama orgoglioso di aver scritto un testo di Meccanica senza far ricorso neppure a una figura. Può suonare strano, dato che queste abbondano nei testi più recenti; del resto si deve riconoscere che una buona figura favorisce largamente la comprensione. Come osservazione personale, devo dire che rimasi molto sorpreso quando, diversi anni fa, trovai all'inizio della *Méchanique* la frase che riporto nella seconda metà di *Fig. 17;* ma devo anche aggiungere che leggendo la *Dynamique* di D'Alembert, mentre preparavo la conferenza che ha dato origine alla nota



AVERTISSEMENT.

On a déja pluſieurs Traités de Méchanique, mais le plan de celui-ci eſt entiérement neuf. Je me ſuis propoſé de réduire la théorie de cette Science, & l'art de réſoudre les problêmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le ſimple développement donne toutes les équations néceſſaires pour la ſolution de chaque problême. J'eſpere que la maniere dont j'ai tâché de remplir cet objet, ne laiſſera rien à deſirer.

On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expoſe ne demandent ni conſtructions, ni raiſonnemens géométriques ou méchaniques, mais ſeulement des opérations algébriques, aſſujetties à une marche réguliere & uniforme. Ceux qui aiment l'Analyſe, verront avec plaiſir la Méchanique en devenir une nouvelle branche, & me ſauront gré d'en avoir étendu ainſi le domaine.

Fig. 17. L'incipit della Méchanique Analytique di lagrange, nella prima edizione.

presente, ho capito le ragioni di Lagrange. Ciononostante devo ammettere che nei molti anni del mio insegnamento non ho mai lesinato le figure – al pari di molti miei colleghi.

A conclusione di questa nota mi sia consentito riportare la citazione che D'Alembert pone a chiusura del terzo e ultimo volume del *Système du Monde*, riprendendo *ce qu'un Ecrivain éloquent* & *Philosophe a dit de son siécle, qui à plusieurs regards ressemblait aussi au nôtre.*

> *"Nec omnia apud priores meliora, sed nostra quoque ætas quædam artium & laudis imitanda posteris tulit."*
>
> *(Tacitus, Annalium liber III)*

Appendice A. Le coordinate celesti e gli elementi orbitali dei pianeti

In questa appendice esporrò brevemente alcune nozioni indispensabili per comprendere il lavoro di D'Alembert. Agli occhi di un lettore esperto di astronomia questa appendice apparirà affrettata e ingenua; mi giustifico dicendo che è quanto basta, a mio parere, per comprendere quali siano i problemi affrontati da D'Alembert. Mi soffermerò in particolare su due punti:

(i) Le coordinate celesti e i cataloghi delle stelle.
(ii) La rappresentazione delle orbite dei pianeti e le ineguaglianze.

Il riferimento standard per le osservazioni astronomiche ci viene fornito dal *cielo delle stelle fisse*. Nell'astronomia antica, e successivamente fino a Newton e oltre, questo viene concepito come una sfera sulla quale sono collocate le stelle, la cui posizione relativa visibilmente non muta nel tempo; il fenomeno della parallasse stellare è stato studiato solo a partire dalla fine del secolo XVII. Il Sole, la Luna e i Pianeti si muovono rispetto alle stelle fisse, e il primo compito dell'astronomia è descrivere quei movimenti e prevedere i fenomeni celesti, ad esempio le eclissi.

Il primo passo consiste nell'introdurre un sistema di coordinate sulla sfera delle stelle fisse. La scelta piu semplice consiste nel proiettare su quella sfera le coordinate geografiche, latitudine e longitudine, che usiamo abitualmente sulla superficie della Terra; nel fare questa operazione nulla ci vieta di agire come se la Terra fosse al centro dell'Universo, perché, diceva già Copernico, la distanza delle stelle è di molto maggiore di quella del Sole. La latitudine di una stella è l'angolo rispetto al polo Nord (che nella nostra epoca si trova in prossimità delle Stella Polare). La longitudine è l'angolo misurato sull'*equatore celeste*, il cerchio massimo formato dai punti a 90° rispetto al Polo Nord, che è poi la proiezione dell'equatore terrestre sulla sfera. Il problema è fissare lo zero della longitudine, il che richiede a sua volta una breve discussione.[2]

Sulla sfera celeste, oltre all'equatore si identifica la circonferenza su cui si verificano le eclissi, sia di Luna che di Sole: è detta *Eclittica*, e coincide con il percorso apparente del Sole durante l'anno, come visto dalla Terra. Nel sistema eliocentrico è il cerchio percorso dalla Terra, vista dal Sole. L'eclittica è inclinata di circa $23^\circ\, 30'$ rispetto all'equatore celeste, e lo interseca in due punti diametralmente opposti, che vengono detti *nodi*; questi punti rappresentano la posizione del Sole in corrispondenza agli equinozi. Il punto corrispondente all'equinozio di primavera viene chiamato convenzionalmente *punto* γ o *punto vernale*, e a esso viene assegnata la longitudine zero. Il riferimento risulta così fissato.

Si procede poi a misurare le coordinate delle stelle fisse. Ad esempio, per le stelle vicine all'equatore si può stabilire la longitudine con buona precisione sfruttando le eclissi. Per le altre, occorre identificare il meridiano su cui si trova a stella. Si tratta comunqe di operazioni che si possono portare a termine facendo uso di strumenti quali gnomone, astrolabio o sfere armillari, disponibili agli astronomi greci. I dati vengono poi rielaborati facendo uso di metodi geometrici, tra cui la trigonometria sferica. In tal modo si possono compilare dei *cataloghi stellari*, contenenti le coordinate di un certo numero di stelle (le più luminose). La classificazione delle stelle in costellazioni risponde anche all'esigenza di identificare rapidamente delle regioni del cielo. La compilazione di cataloghi di stelle fisse con le loro coordinate è uno dei compiti svolti a più riprese e con miglioramenti successivi dagli astronomi antichi, e sempre attuale.

I moti di Luna e Pianeti vengono descritti tramite le loro coordinate sulla sfera celeste, determinate confrontando la posizione dell'oggetto che ci interessa rispetto alle stelle fisse. Del resto questo è il procedimento che si usa ancor oggi per classificare asteroidi, comete o comunque tutti gli oggetti che vediamo nel cielo. Dobbiamo tener presente che noi possiamo osservare solo la latitudine e la longitudine di un oggetto sulla sfera celeste; le distanze non sono osservabili direttamente, ma devono essere calcolate ricorrendo a metodi geometrici; Keplero potè farlo grazie alle osservazioni di Tycho Brahe.

Veniamo alla rappresentazione delle orbite nel sistema geocentrico. Nella descrizione di Keplero i Pianeti (compresa la Terra) si muovono cia-

[2] Lo stesso problema si pone per le coordinate geografiche sulla Terra: tutti sappiamo che per convenzione si misura la longitudine a partire dal meridiano di Greenwich.

scuno su un piano cha passa per il Sole. La traiettoria, vista dal Sole, è una circonferenza sulla sfera delle stelle fisse. I piani delle varie orbite non coincidono tra di loro e con l'eclittica (che, ricordiamolo, è la traiettoria della Terra). Ciascuna circonferenza interseca l'eclittica in due punti, che vengono detti *nodi*. Il piano dell'orbita di un pianeta viene identificato da due quantità: l'*inclinazione*, ossia l'angolo che quel piano forma con l'eclittica, e la *longitudine del nodo ascendente*, ossia la longitudine del punto in cui il pianeta attraversa l'eclittica passando dall'emisfero a sud a quello a nord, misurata rispetto al punto γ; in tal modo la longitudine del nodo terrestre è zero, per definizione; quella degli altri Pianeti non è nulla.

Per dire di più diventa indispensabile sganciarsi dalla rappresentazione della traiettoria rispetto alle stelle fisse, e tener conto anche della distanza del Pianeta dal Sole; in altre parole: ricostruire la forma dell'orbita nello spazio, o meglio nel piano su cui si muove il Pianeta. Questa è l'operazione che Keplero ha potuto compiere grazie alla notevole precisione delle osservazioni di Tycho Brahe: l'errore era stato ridotto dai circa $10'$ delle osservazioni visuali a meno di $2'$. Qui interviene la prima legge di Keplero, che ben conosciamo: l'orbita è *un'ellisse* che ha il Sole in uno dei fuochi. La determinazione dell'ellisse richiede tre quantità: il *semiasse maggiore* dell'ellisse, che rappresenta in pratica la distanza media del Pianeta dal Sole; l'*eccentricità*, che rappresenta la distanza del Sole dal centro dell'ellisse divisa per il semiasse maggiore, e quindi lo schiacciamento rispetto a una circonferenza; la direzione del *perielio* rispetto al nodo, che dà l'orientamento dell'ellisse. Opposto al perielio si trova l'*afelio*, e la retta (passante per il Sole) che congiunge perielio e afelio viene detta *linea degli apsidi*. Tutte queste informazioni hanno carattere puramente geometrico: le ellissi del modello kepleriano sono fisse nel tempo.

Il moto del Pianeta sull'ellisse viene descritto dalla seconda legge di Keplero, o *legge delle aree*: il raggio che congiunge il Sole col Pianeta spazza aree equali in tempi eguali. La quantità rilevante è il *periodo* del Pianeta, che si può misurare con precisione elevata accumulando osservazioni per diversi secoli.

L'orbita della Luna, in prima e alquanto rozza approssimazione, è anch'essa ellittica, ma nel fuoco dell'ellisse si trova la Terra, e non il Sole.

Riassumendo, nella descrizione di Keplero entrano cinque quantità che sono costanti: l'inclinazione, la longitudine del nodo ascendente, l'eccentricità, la direzione del perielio e il semiasse maggiore; tali quantità vengono dette *elementi orbitali*, e sono pubblicate nei cataloghi degli oggetti celesti, ad esempio gli asteroidi. Il moto sull'ellisse non è uniforme: il pianeta si muove più velocemente al perielio rispetto all'afelio. Quest'ultima *ineguaglianza* era descritta dagli astronomi greci mediante gli equanti. La forma ellittica dell'orbita giustifica, ad esempio, la variazione del diametro apparente del Sole e della Luna come visti dalla Terra: in ambedue i casi il diametro è circa 30′ (mezzo grado), ma non è costante. La seconda legge, insieme alla prima, rende conto del fatto che nell'emisfero nord della Terra la stagione estiva (dall'equinozio di primavera a quello di autunno) è di poco più lunga di quella invernale: ciò è stato osservato da Eratostene (circa 274–194 aC). Inoltre, sempre in conseguenza della seconda legge di Keplero, la durata del giorno solare non è costante nel corso dell'anno; in effetti abbiamo imparato alle scuole superiori che il secondo viene definito come la 86400^{ma} parte del giorno solare *medio*; l'aggettivo è indispensabile.

Le ineguaglianze dei moti planetari vengono descritte ammettendo che i cinque elementi orbitali non siano in realtà fissi, ma possano variare lentamente nel tempo. Gli astronomi fanno uso del concetto di *ellisse osculatrice*: a un determinato istante si danno i parametri dell'ellisse che verrebbe descritta dal Pianeta se in quel momento si rimuovessero tutte le azioni di disturbo, lasciando solo l'azione del Sole. La *teoria delle perturbazioni secolari*, sviluppata a partire dal secolo XVIII dagli autori che ho più volte citato, ha lo scopo di calcolare l'evoluzione di tali elementi. L'aggettivo secolare sta a indicare che l'evoluzione è molto lenta, e diventa osservabile sull'arco di secoli. Questo è il problema trattato nel paragrafo 4.4. Grazie a quella teoria Lagrange, seguito a breve da Laplace, ha mostrato ad esempio che i nodi e i perieli delle orbite planetarie sono soggetti a una precessione molto lenta, con periodi che vanno da qualche secolo a oltre un milione di anni, a seconda dei casi.

Fa eccezione la teoria della Luna: la sua vicinanza alla Terra fa sì che le deviazioni rispetto all'orbita ellittica siano decisamente consistenti. Come ho detto nel testo una rivoluzione completa del nodo dell'orbita lunare si completa in circa 18,6 anni, ed è responsabile del ciclo periodico delle eclissi; l'apogeo compie una rotazione in poco meno di 9 anni. In effetti la teoria del moto della Luna ha rappresentato a lungo un problema alquanto complesso per gli astronomi; ne è stata data una versione soddisfacente solo alla fine del secolo XIX da George William Hill (1838–1914), seguito qualche anno dopo da Ernest William Brown (1866–1938). Le teorie di Newton e di D'Alembert di cui si parla nel paragrafo 4.3 sono i primi passi verso lo sviluppo di una teoria completa.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Bradley and G. Sarton: *Discovery of the Main Nutation of the Earth's Axis*, Isis **37**, 333-383 (1932).

[2] Jean le Rond D'Alembert: *Traité de dynamique*, David l'ainé libraire, Paris, (1743).

[3] Jean le Rond D'Alembert: *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, David l'ainé libraire, Paris, (1744).

[4] Jean le Rond D'Alembert: *Recherches sur la précession des equinoxes et sur la nutation de l'axe de la terre dans le sytème Newtonien*, David l'ainé libraire, Paris, (1749).

[5] Jean le Rond D'Alembert: *Recherches sur differens points importans du système du monde*, 3 vol., David l'ainé libraire, Paris, (1754-1756).

[6] Jean le Rond D'Alembert: *Traité de dynamique*, seconda edizione, David libraire, Paris, (1758).

[7] Jean le Rond D'Alembert: *Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences et belles Lettres, année MDCCXLVII, 214-219. *Suite des recherches sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration*, ibid. 219-249 (1749).

[8] A. Giorgilli: *A Kepler's note on secular inequalities*, Rendiconti dell'Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere, Classe di Scienze Matematiche e Naturali, 145, 97-119 (2011).

[9] J.L. Lagrange: *Solution de différents problèmes de calcul intégral*, Miscellanea Tauriniensia, t.III (1762-1765).

[10] J.L. Lagrange: *Recherche sur les équations séculaires des mouvements des noeuds et des inclinaisons des orbites des planètes*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris (1774).

[11] J.L. Lagrange: *Théorie des variations séculaires des éléments des planètes. Première partie contenant les principes et les formules générales pour déterminer ces variations*, Nouveaux mémoires de l'Académie des Sciences et Belles–Lettres de Berlin (1781).

[12] J.L. Lagrange: *Théorie des variations séculaires des éléments des planètes. Seconde partie contenant la détermination de ces variations pour chacune des planètes principales*, Nouveaux mémoires de l'Académie des Sciences et Belles–Lettres de Berlin (1782).

[13] P-S. de Laplace: *Mémoire sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dependent*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, Savants Etrangers, (1773).

[14] P-S. de Laplace: *Théorie de Jupiter et Saturne*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, année 1785, (1788).

[15] J. Laskar: *Lagrange et la Stabilité du Sytème Solaire*, in: G. Sacchi Landriani e A. Giorgilli (eds): *Sfogliando la Méchanique Analytique*, LED edizioni, Milano (2008).