

## INTERPRETAZIONE DELLA TEORIA QUANTISTICA, COSMOLOGIA E GRAVITAZIONE

Nota del m.e. GIOVANNI M. PROSPERI (\*)

(Adunanza del 25 maggio 2023)

SUNTO. – Sulla linea di un recente lavoro, il problema dell'interpretazione della Teoria Quantistica (TQ) è riconsiderato in una prospettiva dell'intero universo e ponendosi dal punto di vista di Bohr, secondo cui il linguaggio classico è il linguaggio della nostra esperienza e la TQ acquista senso solo con riferimento ad esso. Viene distinto un livello classico o macroscopico e un sottostante livello quantistico o microscopico che è percepito solo attraverso le modificazioni che induce nel primo. Si suppone lo stato macroscopico specificato da un tensore di energia momento classico e da un insieme di correnti conservate che si ammette abbiano un ben determinato valore in ogni punto dello spazio e ad ogni tempo. La dinamica microscopica si suppone espressa dal medesimo formalismo dell'ordinaria TQ. Concetto fondamentale: l'usuale postulato di probabilità della TQ, basato sulla corrispondenza tra operatori autoaggiunti e osservabili, è sostituito con quello di una distribuzione di probabilità direttamente per le variabili macroscopiche, espressa in funzione dei corrispondenti operatori quantistici e di un appropriato operatore di densità. Come modello cosmologico è assunta una varietà del modello standard con  $\Omega=1$ , tempo iniziale a  $t = -\infty$ , un certo numero di campi quantistici fondamentali, tra cui un campo scalare inflatonico con potenziale alla Goldston, stato di vuoto per  $t \rightarrow -\infty$ . Le fluttuazioni scalari nella radiazione di fondo a microonde sono molto bene riprodotte come sempre attribuendo opportuni valori ai due parametri che caratterizzano il potenziale, le fluttuazioni tensoriali corrispondentemente previste tuttavia non sono osservate. Quest'ultima circostanza sembrerebbe suggerire che il campo gravitazionale sia un oggetto puramente classico, ipotesi perfettamente compatibile con il formalismo proposto ma che non lo è con quello ordinario.

\*\*\*

---

(\*) Professore emerito dell'Università di Milano, già collaboratore dell'INFN, sezione di Milano, Italy. E-mail: Giovanni.Prosperti@mi.infn.it

ABSTRACT. – On the line of a recent paper, the problem of interpretation of Quantum Theory (QT) is reconsidered in a cosmological perspective and of Bohr's idea that the classical language is the language of our experience and QT acquires a meaning only with a reference to it. A classical or macroscopic level is distinguished and a quantum or microscopic one that is perceived only through the modifications that it induces in the first. The macroscopic state is specified by a classical energy-momentum tensor and conserved currents, which are supposed to have always well-defined values. The microscopic dynamics are expressed by the usual QT formalism. Fundamental idea: the usual probability rule of QT, based on an observables self-adjoint operators correspondence, is replaced with a distribution of probability directly for the macroscopic variables, defined in terms of the corresponding quantum operators and a quantum density operator. For the universe, a variance of the standard model with  $\Omega=1$  is assumed, one inflaton, a Goldstone type potential, initial time at  $t=-\infty$ , expectation values of all fundamental fields vanishing for  $t \rightarrow -\infty$ . The scalar fluctuations in the cosmic microwave background can be correctly explained giving appropriate values to the potential parameters, but the absence of the tensor fluctuations remains not understood. This seems to suggest that gravity is a pure classical phenomenon, what could be consistently accommodated in our framework but it is inconsistent with the usual formalism.

Voglio riconsiderare in questo scritto un fondamentale problema di coerenza nella formulazione della Teoria Quantistica (TQ) che, nonostante i fiumi di inchiostro che vi sono stati riversati, mi sembra manchi tutt'ora di una soluzione soddisfacente. Lo farò sulla linea di un recente articolo da me pubblicato in collaborazione con un mio vecchio allievo [1]. Dato l'interesse interdisciplinare dell'argomento, cercherò di mantenere la prima sezione dedicata ad una presentazione del problema per quanto possibile ad un livello puramente illustrativo e riserverò gli aspetti formali alle sezioni successive.

## 1. IL PROBLEMA E UNA PROSPETTIVA DI SOLUZIONE

La Fisica Classica, la fisica che si è sviluppata sino agli inizi del '900, procede per modelli idealizzati, ma legati in modo molto diretto alla nostra esperienza ordinaria. Suppone che le proprietà di un oggetto possano essere specificate da un insieme di variabili con un riferimento empirico immediato, alle quali si possa attribuire in ogni momento un valore ben definito che cambia con continuità nel tempo.

Suppone in generale che tali variabili obbediscano a un sistema di equazioni differenziali, quelle della Meccanica, della Termodinamica di non equilibrio, dell'Elettromagnetismo, che controllano la loro evoluzione nel tempo e permettono di prevedere i loro valori in un momento successivo, se essi sono conosciuti ad un qualche tempo iniziale.

È una *Teoria deterministica*, in cui ogni affermazione è supposta avere un significato immediato e nessun riferimento esplicito a un'effettiva procedura di osservazione è per sé necessario.

La Teoria Quantistica, al contrario, consiste, come la intendiamo oggi, in un insieme di regole matematiche astratte, che non hanno in sé stesse alcun significato intuitivo, ma permettono, date certe informazioni iniziali sul sistema, di calcolare la probabilità che un esperimento successivo dia un certo risultato.

Un riferimento esplicito a procedimenti di osservazione e ai tempi in cui essi sono effettuati è essenziale e nessun significato può essere attribuito a qualsiasi affermazione su un qualche oggetto a prescindere da un tale riferimento. Ogni tentativo di adottare dei modelli intuitivi con proprietà esattamente specificate, come nel caso della Teoria Classica, porta insuperabili contraddizioni, se usato al di fuori di certe circostanze e di condizioni limite precise.

Se ci riferiamo all'esempio più semplice, quello di una singola particella (un fotone, un elettrone, un protone, ...), troviamo che tutte le volte che vogliamo osservarla essa si presenta come perfettamente localizzata, idealizzabile come un oggetto puntiforme. Nell'intervallo tra due osservazioni essa è tuttavia descritta da una funzione d'onda complessa  $\psi(x, t)$ , quindi da un oggetto esteso, che obbedisce ad un'equazione in sé deterministica ma il cui modulo al quadrato  $|\psi(x, t)|^2$  è interpretato come la densità di probabilità di trovare al tempo  $t$  la particella, se la si osserva, in un intorno del punto  $x$  senza che apparentemente esista una causa, perlomeno di carattere fisico, che spieghi perché essa venga poi di fatto osservata in quel luogo piuttosto che in un altro tra quelli possibili. Solo se si dispone di un fascio di particelle sufficientemente intenso, tutte preparate nello stesso modo, si trova che queste, pur essendo rivelate singolarmente in posizioni determinate, si distribuiscono statisticamente secondo la legge di probabilità indicata.

Particolarmente significativa diviene allora nel contesto la considerazione del fenomeno di interferenza attraverso un diaframma munito di due fenditure che fu oggetto di grandissime discussioni tra Einstein e Bohr [2].

Nella prima metà dell'ottocento Young mostrò che facendo passare un fascio di luce attraverso un diaframma su cui erano praticate due fenditure, sufficientemente vicine e sottili, si ottenevano su uno schermo fasce alternativamente luminose e oscure, corrispondenti al sovrapporsi in fase o in opposizione di fase di onde provenienti dall'una o dall'altra. (v. *Fig. 1*). Fu questo risultato a far prevalere la teoria ondulatoria della

luce proposta da Huygens su quella teoria corpuscolare di Newton. Già con la prima teoria quantistica di Planck e di Einstein si attribuiva però di nuovo alla luce anche un carattere corpuscolare e si poneva il problema della coesistenza dei due aspetti, risolto appunto con l'idea della distribuzione statistica dei quanti di luce, i fotoni, sullo schermo.

Quando poi, con la formulazione della nuova Meccanica Quantistica, fu attribuito anche alle particelle un carattere ondulatorio, ci si doveva aspettare che anche con un fascio di particelle si dovesse poter ottenere un fenomeno simile. Ai tempi delle discussioni tra Einstein e Bohr, a cavallo tra gli anni '20 e '30 la natura ondulatoria delle particelle era stata confermata attraverso esperimenti di diffrazione su cristalli. Un esperimento del tipo di Young non era realizzabile neppure con le particelle note più leggere, come gli elettroni, per la piccolezza della lunghezza d'onda ad essi associata anche per energie abbastanza basse; dell'ordine di  $10^{-8}$  cm per un'energia di 100 eV secondo la relazione di de Broglie tra lunghezza d'onda e quantità di moto,  $\lambda = \frac{h}{p}$ . Data la sua significanza esso rimase però alla base di accanite discussioni come esperimento ideale.

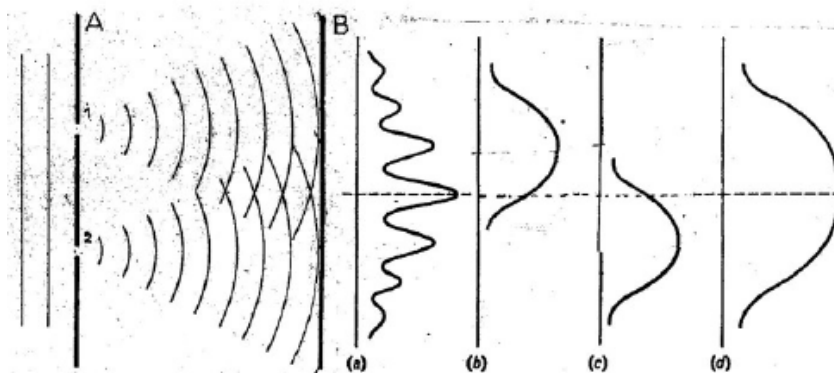
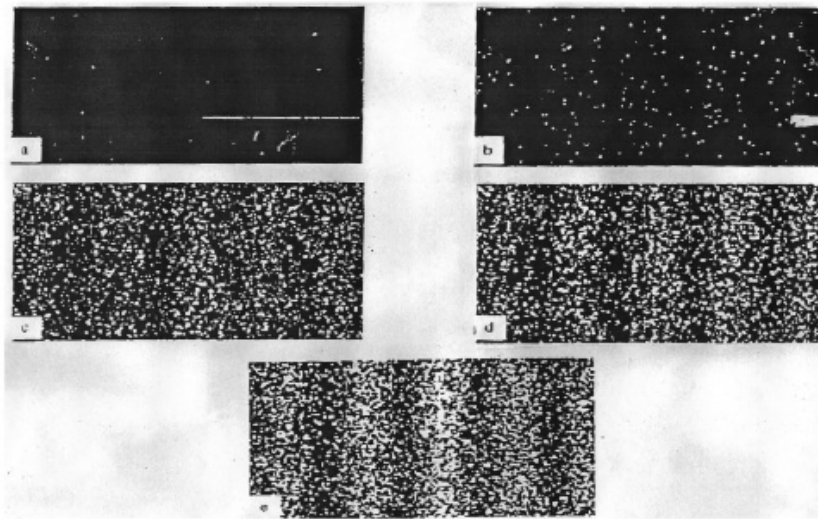


Fig 1. Interferenza da due fenditure: a)  $|\psi|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2\text{Re} \psi_1^* \psi_2 \neq |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ ; b)  $|\psi_1|^2$ ; c)  $|\psi_2|^2$ ; d)  $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ .

Oggi le difficoltà tecniche sono state superate ed esperimenti sostanzialmente riconducibili a quello delle due fenditure sono stati eseguiti con diversi tipi di particelle, con anche la possibilità di mettere in evidenza la singola particella. Particolarmente notevole tra altri è

l'esperimento di un gruppo giapponese (Tonamura e collaboratori, 1984 [3]). Un fascio di elettroni veniva fatto incidere su un filo carico positivamente che si comportava come un biprisma ottico ed equivale perciò al diaframma con due fenditure. La figura è raccolta su uno schermo fluorescente, cioè su uno strato di piccoli cristalli che colpiti da elettroni emettono dei fotoni. Essa era poi osservata per mezzo di un dispositivo elettronico costituito da un reticolo di piccoli fotomoltiplicatori che consentiva, variando il tempo di registrazione, di ottenere la distribuzione sullo schermo di un numero variabile di elettroni; da una decina a settantamila nelle foto riportate in *Fig. 2*. Come si vede nel caso di dieci elettroni si osserva un corrispondente numero di punti luminosi sullo schermo apparentemente distribuiti a caso. Come aumenta il numero delle particelle tuttavia, i punti tendono a infittirsi su certe fasce fino a delineare progressivamente la figura di interferenza.



*Fig. 2. La figura di Interferenza come risultato della distribuzione statistica degli elettroni sullo schermo (Tonamura e collaboratori, 1984).*

Ritorniamo però sul significato teorico e le conseguenze concettuali dei precedenti risultati. Osserviamo che la funzione d'onda della singola particella che giunge sullo schermo è evidentemente della forma  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ , risulta cioè dalla somma dell'onda che è passata

attraverso la fessura 1 e di quella che è passata attraverso la fessura 2 (v. *Fig. 1*). La distribuzione attesa di particelle sarà perciò data da  $|\psi|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2\text{Re } \psi_1^* \psi_2$ , dove l'effetto dell'interferenza è racchiuso nell'ultimo termine e legato alla coesistenza sullo schermo delle due onde (diagramma *a* nella *Fig. 1*). Se però cerchiamo di separare le particelle che giungono da ciascuna fenditura, per esempio chiudendo alternativamente la 2 e la 1, troviamo che le distribuzioni dovranno essere date rispettivamente da  $|\psi_1|^2$  e  $|\psi_2|^2$  (diagrammi *b* e *c*) e la distribuzione complessiva da  $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$  (diagramma *d*) che è diversa da  $|\psi_1 + \psi_2|^2$  e non corrisponde ad alcuna interferenza.

La situazione non muta se si immagina di disporre di un dispositivo effettivo, per esempio due contatori posti di fronte alle fenditure, che segnali il passaggio della particella dall'una o dall'altra fenditura. Se è ad esempio il contatore posto di fronte alla fenditura 1 a dare segnale (ricordiamo che uno solo è supposto dare segnale) la funzione d'onda va ridefinita per tener conto del risultato e posta uguale a  $\psi_1$  a meno di un fattore di normalizzazione (collasso della funzione d'onda), come richiesto dalla necessità di coerenza di misure successive. La figura di interferenza viene così distrutta. In concreto per verificare l'ultima circostanza sono stati eseguiti esperimenti del tipo descritto in presenza di un gas invece che nel vuoto. Il passaggio di una particella carica attraverso l'una o l'altra fenditura è segnalata dalla scia di ioni da essa creata e quindi realizza la situazione dei due rivelatori. Si è constatato che la figura d'interferenza spariva quando si raggiungeva una certa pressione nel gas.

Si deve concludere che non è possibile attribuire alla singola particella la posizione 1 o 2 nell'attraversamento del diaframma (a destra o a sinistra del filo nel dispositivo effettivo descritto) se non con riferimento ad un effettivo esperimento e questo modifica l'intero sviluppo successivo. Il modello della particella come corpo puntiforme che descrive una traiettoria continua è del tutto inapplicabile.

Il problema non è specifico dell'esempio considerato, ma è del tutto generale se si adotta per un sistema generico il consueto postulato di probabilità fondato sulla corrispondenza tra osservabili e operatori autoaggiunti. In approssimazione non relativistica, l'insieme delle funzioni d'onda  $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t)$  per un determinato sistema di particelle si può strutturare come uno spazio vettoriale a infinite dimensioni (spazio di Hilbert) con un concetto di ortogonalità e di norma (l'analogo della lunghezza) e la possibilità di costruire sistemi di assi unitari, ortogonali e in funzione dei quali può essere espresso un qualsiasi altro

vettore come nell'ordinario spazio tridimensionale. In modo analogo, nella formulazione relativistica, in cui le particelle di una determinata specie compaiono come quanti di uno specifico campo, gli stati di questo vengono rappresentati tramite vettori (vettori di stato) di un analogo spazio più astratto.

Secondo il postulato di cui sopra ad ogni grandezza osservabile  $A$ , relativa ad un determinato sistema fisico  $C$ , corrisponde nello spazio di Hilbert ad esso relativo un sistema di assi  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r, \dots$ , denominati autostati e un insieme di valori ad essi associati  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots$  che rappresentano i valori assunti da  $A$  quando il sistema si trova nel corrispondente autostato (equivalentemente all'osservabile  $A$  si può far corrispondere l'operatore autoaggiunto  $\hat{A}$  che ha per autovalori i valori numerici sopra riportati e i corrispondenti assi come autovettori). Se invece il sistema  $C$  si trova in un generico stato  $\psi$  che, sviluppato secondo gli assi precedenti, risulti effettivamente della forma  $\psi = \sum_S c_S \psi_S$  (stato di sovrapposizione), la grandezza  $A$  si ritiene indeterminata. Se però si suppone di eseguire in quell'istante una misura di  $A$  la probabilità di ottenere il risultato  $A = \alpha_S$  è data da  $|c_S|^2$  e se il suddetto risultato è effettivamente ottenuto lo stato va ridefinito come  $\psi = \psi_S$ .

Se allora si considera un secondo osservabile  $B$  con autostati  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r, \dots$  questi risulteranno in generale espressi come sovrapposizione dei precedenti  $\varphi_r = \sum_S S_{rS} \psi_S$ . Non esisterà perciò in generale uno stato che corrisponda a valori determinati per entrambi le grandezze e l'osservazione di una di queste modificherà profondamente tutto ciò che riguarda la seconda. E' questo nella sostanza il contenuto del famoso principio di indeterminazione di Heisenberg e la dimostrazione che, come detto, in maniera del tutto generale non si può attribuire ad una grandezza un valore indipendentemente da un effettivo esperimento rivolto a determinarla.

E' chiaro, tuttavia, che perché si possa parlare di un esperimento, di una misura, è necessario che i risultati si possano esprimere in maniera univoca. Per questa ragione secondo Bohr: *il dispositivo sperimentale e il risultato di un esperimento vanno comunque descritti in termini classici, il linguaggio classico essendo il linguaggio della nostra esperienza* [2].

Al punto di vista di Bohr si presenta però un'ovvia obiezione. Al livello fondamentale anche l'apparato sperimentale dovrebbe essere descritto secondo la Teoria Quantistica, perciò, anche le modificazioni in esso indotte dall'interazione con l'oggetto osservato dovrebbero fare riferimento ad un ulteriore dispositivo



che osservi il primo. Si genera così secondo John von Neumann (considerato tra i maggiori matematici della prima metà del '900) una catena di apparati ciascuno dei quali osserva il precedente che a monte deve però necessariamente includere lo stesso sistema nervoso dell'osservatore cosciente [4]. Per von Neumann è proprio l'atto di presa di coscienza di quest'ultimo che dovrebbe dare senso a tutto il processo. Indipendentemente da ogni posizione filosofica, questo tipo di soluzione del problema porta però, tra altre cose, a paradossi poco accettabili, quando si voglia considerare un osservatore cosciente che osserva un altro osservatore cosciente; uno particolarmente famoso è detto del *gatto di Schroedinger*.

Ad un livello più formale, indichiamo con  $\underline{I}$  l'oggetto e supponiamo di voler osservare la grandezza  $A$  ad esso relativa come sopra caratterizzata. Perché un secondo sistema  $\underline{II}$  possa agire come apparecchio di misura di  $A$  è necessario che questo, per effetto di una breve interazione con  $\underline{I}$ , subisca una modificazione differente a seconda del particolare autostato di  $A$  in cui  $\underline{I}$  si trova. Volendo trattare anche  $\underline{II}$  dal punto di vista quantistico, von Neumann suppone che esista una qualche grandezza  $M_{\underline{II}}$  relativa a quest'ultimo con autostati  $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_r, \dots$  e autovalori  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r, \dots$  tale che, supposto il sistema inizialmente nello stato  $\Psi_0$ , per effetto dell'interazione si abbia

$$\psi_s \Psi_0 \rightarrow \psi_s \Psi_s . \quad (1.1)$$

Se si suppone l'oggetto in uno stato più generale  $\psi = \sum_s c_s \psi_s$  dovrà allora aversi

$$\psi \Psi_0 \rightarrow \sum_s c_s \psi_s \Psi_s . \quad (1.2)$$

La probabilità  $|c_s|^2$  quindi di osservare  $A = \alpha_s$  quando la TQ è applicata a  $\underline{I}$  è identica a quella di osservare  $M_{\underline{II}} = \mu_s$ , quando la TQ è applicata anche a  $\underline{II}$ . Ma se applichiamo la TQ anche a  $\underline{II}$ , dobbiamo poi riferirci ad un terzo sistema  $\underline{III}$ , descritto classicamente, che agisca come apparato per l'osservazione di  $M_{\underline{II}}$  su  $\underline{II}$ . Ciò che è importante per von Neumann è l'equivalenza delle situazioni



<p><i>I</i> considerato come oggetto descritto secondo la TQ</p>	<p><i>II + III</i> considerato come apparato descritto classicamente</p>
e	
<p><i>I + II</i> considerato come oggetto descritto secondo la TQ</p>	<p><i>III</i> considerato come apparato descritto classicamente</p>

Nella catena di apparati che si viene a creare, quindi, la linea di demarcazione tra ciò che è considerato oggetto e ciò che è considerato apparato può essere spostata arbitrariamente. Come già detto però, in ultima analisi ciò che decide su quanto è accaduto è *l'atto di presa di coscienza dello sperimentatore*, salvo che si trovi un criterio per spezzare ad un certo punto la catena, cioè che ad un certo stadio vi sia sistema privilegiato per il quale non abbia senso considerare la sovrapposizione di un qualche fondamentale sistema di autostati. Implicitamente in tutte le applicazioni della TQ, sia a processi che coinvolgono singole particelle, sia allo studio delle proprietà della materia macroscopica in condizioni anche molto diverse da quelle della nostra osservazione ordinaria, la catena di von Neumann viene interrotta, coerentemente con le idee di Bohr, al raggiungimento del livello della nostra esperienza immediata. E' proprio questa circostanza che andrebbe però giustificata.

In un libretto di tipo divulgativo P. Jordan [5] congetturava che in un sistema macroscopico, formato da un gran numero di particelle, per la maggior parte degli stati i termini di interferenza tra gli autostati di grandezze macroscopiche si cancellassero largamente l'uno con l'altro, per la complessità stessa del sistema. In un lavoro pubblicato nel 1962, che suscitò al momento una notevole attenzione, e in alcuni sviluppi successivi, un nostro gruppo tra Milano e Pavia tentò di dare una base formale a questa congettura con argomenti di Meccanica Statistica e attraverso una più completa caratterizzazione dell'apparecchio di misura [6]. Accolto con entusiasmo da L. Rosenfeld, uno dei più fedeli assistenti di Bohr, il punto di vista fu invece criticato da Wigner, perché osservava che l'argomento, facendo perno su approssimazioni, mostrava in realtà solo la difficoltà di osservare stati di sovrapposizione del tipo suddetto, non la loro impossibilità sul piano concettuale [7].

Nel tentativo di risolvere il problema da vari punti di vista è stata prodotta una ricchissima letteratura. A nostro parere nessuna soluzione soddisfacente è stata tuttavia trovata. Qui mi limito a citare il rif. [8], un grosso volume curato da J. A. Wheeler e Zureck dove sono raccolti

numerosi tra i lavori più significativi nel campo anteriori al 1982 [9] e per il periodo successivo i proceeding di una serie di congressi biennali sull'argomento organizzati da un gruppo di ricercatori giapponesi e dedicati, oltre che agli aspetti puramente teorici, a tutta una serie di esperimenti cruciali che i progressi tecnologici hanno finalmente permesso di rendere possibile [10].

Nel rif. [11] il nostro gruppo aveva tentato di superare le obiezioni di Wigner trattando formalmente le quantità macroscopiche come permanentemente osservate. Il formalismo sviluppato tuttavia violava la conservazione dell'energia e appariva molto problematica una sua estensione relativistica. Nel rif. [1] abbiamo voluto riconsiderare il problema da un punto di vista più drastico e in primo luogo nella prospettiva dell'intero universo, come ci sembra appropriato.

Come modello cosmologico abbiamo adottato una variante dall'usuale modello  $\Lambda$ CDM, con  $\Omega = 1$  (quindi spazio tempo globalmente piatto) e Big Bang (BB), inteso come momento di inizio della dilatazione dell'universo, a  $t = -\infty$ , come richiesto dall'insieme delle ipotesi assunte.

Ispirandoci a Bohr, abbiamo distinto nella descrizione del mondo fisico un doppio livello, un livello classico o macroscopico, direttamente legato alla nostra esperienza ordinaria, e un sottostante livello quantistico o microscopico, percepito solo attraverso le modificazioni che induce sul primo. A livello macroscopico abbiamo supposto l'esistenza di un insieme esplicito di grandezze di tipo termodinamico (densità di energia, pressione, velocità di spostamento della materia, densità di carica elettrica, ...) specificate in ogni punto dello spazio e in ogni istante da un valore sempre determinato. A livello microscopico abbiamo supposto valido l'usuale formalismo quantistico con un insieme di campi quantizzati (coerentemente con quanto abbiamo detto a proposito dell'estensione relativistica della teoria) in funzione di cui sono espresse tutte le altre grandezze. Tra questi campi, come in tutte le teorie inflazionarie, abbiamo supposto l'esistenza di un campo scalare (campo inflatonico) che guida la dilatazione dell'universo, con una dilatazione molto rapida di brevissima durata, la cui eco può essere oggi osservata in fluttuazioni di temperatura e polarizzazione in seno alla radiazione elettromagnetica a microonde di fondo (CMB) che pervade tutto l'universo. L'universo è supposto inizialmente in uno stato quantistico di vuoto. Successivamente questo può essere ridefinito sulla base di informazioni che noi abbiamo prima di un certo tempo di riferimento, informazioni che ovviamente non potranno riguardare mai l'intero universo,

ma solo quella parte di esso e quindi quei sistemi fisici che siamo in grado di prendere in considerazione.

Ciò premesso, noi lasciamo cadere l'usuale postulato di probabilità, sopra richiamato, basato sulla corrispondenza operatori autoaggiunti (o sistemi di assi nello spazio di Hilbert) e osservabili, centrato sull'oggetto, e lo sostituiamo col postulato di una distribuzione di probabilità sulle variabili macroscopiche, espressa attraverso il formalismo quantistico e in funzione dello stato quantistico, come precisato sopra. Questo postulato, in quanto ciò che è accaduto prima di un certo tempo condiziona ciò che accadrà nel tempo successivo, esprime in certo senso la dinamica delle variabili macroscopiche relative alla porzione di universo a cui ci riferiamo. Nel caso di un corpo costituito da molti componenti identici, in condizioni di equilibrio locale, per cui si abbia una varianza molto piccola delle variabili macroscopiche come previsto dalla Meccanica statistica, esso porta praticamente a equazioni deterministiche del tipo della usuale Meccanica o Termodinamica classica di non equilibrio. Viceversa, in presenza di particelle per così dire fuori dal coro e di osservabili per cui l'ipotesi di von Neumann (1.1) sia effettivamente realizzata con autostati  $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_r, \dots$  corrispondenti a valori praticamente determinati delle variabili macroscopiche, porta alle usuali regole di probabilità quantistica.

Ritornando poi alle fluttuazioni indotte sulla CMB, possiamo ricordare che esse sono di due tipi: *fluttuazioni scalari* che riflettono le fluttuazioni quantistiche del campo inflatonico e *fluttuazioni tensoriali* che dipendono da quelle di un eventuale campo gravitazionale quantistico. Il fatto che le prime siano spiegabili e riproducibili con grande precisione assegnando opportuni valori ai parametri che compaiono nell'espressione del potenziale di auto-interazione del campo inflatonico, mentre quelle tensoriali non sono osservate, potrebbe suggerire che il campo gravitazionale sia un fenomeno puramente classico. Questa circostanza che, se confermata, risolverebbe molti altri problemi è del tutto compatibile con la nostra formulazione, mentre non lo è con quella ordinaria.

## 2. LIVELLO CLASSICO E LIVELLO QUANTISTICO

Premettiamo che nel seguito useremo sempre unità naturali ( $c = \hbar = 1$ ) con l'energia di 1 Gev assunta come unità fondamentale. Ricordiamo

$$1\text{GeV}^{-1} = 0.197 \times 10^{-13} \text{ cm} = 6.58 \times 10^{-25} \text{ sec} \quad . \quad (2.1)$$

A livello macroscopico, in coerenza con la termodinamica di non equilibrio (l'ambito più generale della Fisica Classica), postuliamo uno stato dell'universo espresso da un tensore di energia-momento classico  $t_{\mu\nu}(t, \mathbf{x})$  e un certo numero di correnti conservate  $j_{1\mu}(t, \mathbf{x}), j_{2\mu}(t, \mathbf{x}), \dots, j_{r\mu}(t, \mathbf{x})$  in dipendenza dal modello di fisica delle particelle adottato (corrente elettromagnetica, corrente barionica, corrente leptonica, nell'ordinario modello standard). Ammetteremo che queste grandezze abbiano sempre un valore ben determinato in ogni punto  $\mathbf{x}$  dello spazio e ad ogni tempo  $t$ . Più precisamente, tenuto conto delle proprietà delle corrispondenti grandezze quantistiche e di una celebre analisi di Rosenfeld e Bohr, ammetteremo che esse siano rappresentate in un tutto il loro sviluppo da distribuzioni nel senso di Schwarz.

Al tensore classico  $t_{\mu\nu}(x)$  inoltre associamo una metrica classica  $g_{\mu\nu}(x)$  definita dall'equazione di Einstein

$$R_{\mu\nu}(g_{\rho\sigma}) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x) R(g_{\rho\sigma}) = -8\pi G t_{\mu\nu}(x) , \quad (2.2)$$

dove ovviamente indichiamo con  $R_{\mu\nu}(g_{\rho\sigma})$  il tensore di curvatura di Ricci relativo alla metrica  $g_{\mu\nu}(x)$ , con  $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$  la corrispondente curvatura scalare e con  $G = 6.71 \times 10^{-39} \text{ GeV}^{-2}$  la costante gravitazionale. Similmente, imponendo le equazioni di Maxwell, possiamo introdurre un campo elettromagnetico classico associato alla relativa corrente.

Dalla (2.2) segue automaticamente, per l'identità di Bianchi, la legge di conservazione

$$D_{\mu} t^{\mu\nu} = \partial_{\mu} t^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\mu} t^{\rho\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu} t^{\rho\nu} = 0 . \quad (2.3a)$$

In aggiunta, per ciascuna corrente posteremo l'analogia legge

$$D_{\mu} j_k^{\mu} = \partial_{\mu} j_k^{\mu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\mu} j_k^{\rho} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (2.3b)$$

Per rendere univoca la definizione di  $g_{\mu\nu}(x)$  posteremo inoltre che in un appropriato riferimento essa si riduca per  $t \rightarrow -\infty$  ad una metrica di Robertson Walker

$$\bar{g}_{00}(x) = -1, \quad \bar{g}_{0j}(x) = 0, \quad \bar{g}_{ij}(x) = a^2(t) \delta_{ij} \quad \text{con} \quad a(t) \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

Facciamo quindi con ciò l'ipotesi di un universo iniziale perfettamente omogeneo e isotropo.

Al livello microscopico supporremo, come detto, valido l'usuale formalismo della teoria quantistica. Ci metteremo nella descrizione di Heisenberg e coerentemente con tutti i modelli di fisica delle particelle, ma senza volerci riferire specificamente a nessuno determinato, supporremo l'esistenza di un certo numero di campi fondamentali  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$ ,  $\dots$  in funzione dei quali siano espresse tutte le altre grandezze. Tra questi supporremo la presenza di un *campo inflatonico* scalare, che indicheremo specificamente con  $\varphi(x)$  e, almeno per il momento, una metrica quantistica  $\gamma_{\mu\nu}$ . Volendo mettere queste ipotesi in evidenza, scriveremo l'azione totale dell'universo come

$$S_T = S_\gamma[\gamma_{\mu\nu}] + S_\varphi[\gamma_{\mu\nu}, \varphi] + S_\phi[\gamma_{\mu\nu}, \varphi, \phi_1, \phi_2, \dots] , \quad (2.5)$$

dove

$$S_\gamma[\gamma_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-\gamma} R(\gamma_{\mu\nu}) , \quad (2.6)$$

$\gamma = \det \gamma_{\mu\nu}$  , e

$$S_\varphi[\gamma_{\mu\nu}, \varphi] = - \int d^4x \sqrt{-\gamma} \left( \frac{1}{2} \gamma^{\rho\sigma} \partial_\rho \varphi \partial_\sigma \varphi + V(\varphi) \right) \quad (2.7)$$

con un potenziale rinormalizzabile  $V(\varphi)$  alla Goldstone

$$V(\varphi) = \frac{\kappa^4}{4\lambda} - \frac{1}{2} \kappa^2 \varphi^2 + \frac{1}{4} \lambda \varphi^4 , \quad (2.8)$$

che è massimo per  $\varphi = 0$  , con  $V(0) = \frac{\kappa^4}{4\lambda}$  , e minimo per  $\varphi = v \equiv \frac{\kappa}{\sqrt{\lambda}}$  , con  $V(v) = 0$ . L'interazione tra  $\varphi$  e gli altri campi è intesa inclusa nel terzo termine della (2.5).

Postuleremo inoltre che per  $t \rightarrow -\infty$  l'universo si trovi in uno stato di vuoto, definito come quello di minima energia, che, adottando il formalismo dell'operatore densità, denoteremo come  $\widehat{W}_{\text{in}} = |0 \rangle \langle 0|$ . Supporremo tale stato invariante per trasformazioni spaziali, ma a causa della dilatazione dell'universo non anche per traslazione temporale. Per

un campo spinoriale o vettoriale  $\phi_s(x)$  allora il valore di aspettazione quantistico deve automaticamente annullarsi asintoticamente

$$\langle \phi_s(x) \rangle_Q \equiv \text{Tr} [\hat{\phi}_s(x) \hat{W}_{\text{in}}] = \langle 0 | \hat{\phi}_s(x) | 0 \rangle \rightarrow 0, \quad (2.9)$$

La situazione è più complicata per un campo scalare e quindi per il campo inflatonico. In tal caso  $\bar{\varphi} = \langle 0 | \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle$  può dipendere solo da  $t$ , ma può essere diverso da zero. Perciò scriveremo

$$\hat{\varphi}(x) = \bar{\varphi}(t) + \hat{\chi}(x), \quad \text{con} \quad \langle \chi(x) \rangle_Q \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

e corrispondentemente

$$\hat{\gamma}_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(t) + \hat{h}_{\mu\nu}(x) \quad \text{con} \quad \langle h_{\mu\nu}(x) \rangle_Q \rightarrow 0, \quad (2.11)$$

identificando  $\bar{g}_{\mu\nu}(t)$  con il tensore definito dall'equazione (2.4).

Supporremo che  $\bar{\varphi}(t)$  e  $\bar{g}_{\mu\nu}(t)$  siano soluzioni delle equazioni di Eulero relative all'azione (2.5-8) quando tutti gli altri campi sono posti uguali a 0. Otteniamo

$$\ddot{\bar{\varphi}}(t) + 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \dot{\bar{\varphi}}(t) + V'(\bar{\varphi}(t)) = 0 \quad (2.12)$$

e l'equazione di Friedman

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \left( \frac{1}{2} \dot{\bar{\varphi}}(t)^2 + V(\bar{\varphi}(t)) \right)}. \quad (2.13)$$

Per ottenere che la (2.9) sia soddisfatta per ogni campo supporremo inoltre

$$\bar{\varphi}(t) \rightarrow 0 \quad \text{e naturalmente} \quad a(t) \rightarrow 0. \quad (2.14)$$

Assumiamo ovviamente  $\hat{h}_{\mu\nu}(x)$  come definizione del campo gravitazionale quantistico.

### 3. POSTULATO BASE

Vogliamo ora introdurre il nostro postulato fondamentale.

Poiché abbiamo supposto che le variabili classiche come gli operatori di campo quantistici siano delle distribuzioni, ciò che di fatto è dotato di senso sono espressioni del tipo

$$\begin{aligned} \vartheta_f &= \int d^4x f^{\mu\nu}(x) t_{\mu\nu}(x) \text{ e} \\ \sigma_{kh} &= \int d^4x h^\mu(x) j_{k\mu}(x) \quad (k = 1, 2, \dots, r), \end{aligned} \quad (3.1)$$

dove  $f^{\mu\nu}(x) = f^{\nu\mu}(x)$  e  $h^\mu(x)$  sono funzioni sufficientemente regolari (funzioni peso) che si trasformano come densità tensoriali o vettoriali di ordine appropriato.

Una scelta particolarmente significativa è la seguente

$$f^{\mu\nu}(x) = e^{\mu\nu} w(x) \quad \text{or} \quad h^\mu(x) = e^\mu w(x) \quad , \quad (3.2)$$

dove  $e^{\mu\nu}$  e  $e^\mu$  sono proiettori relativi a specifiche componenti e  $w(x)$  è una funzione positiva, diversa da 0 solo in un piccolo intorno di un punto nello spazio-tempo  $x_w \equiv (t_w, \mathbf{x}_w)$ , con  $\int d^4x w(x) = 1$ . Con essa le (3.1) vengono a esprimere delle medie su piccole regioni spaziali e temporali delle grandezze implicate in un intorno del punto indicato. Tipici esempi di  $w(x)$  possono essere la gaussiana

$$w(x) = \frac{\Lambda_t \Lambda_s^3}{\pi^2} \exp \left[ - \left\{ \Lambda_t^2 (t - t_w)^2 + \Lambda_s^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_w)^2 \right\} \right] \quad , \quad (3.3a)$$

con  $\Lambda_t$  e  $\Lambda_{st}$  sufficientemente grandi, o espressioni del tipo

$$w(x) = \frac{1}{\omega} Y_\omega(x - x_w) \quad , \quad (3.3b)$$

dove  $Y_\omega(x)$  rappresenta la funzione caratteristica di una piccola regione di volume  $\omega$  attorno all'origine (funzione con valore 1 su di  $\omega$ , 0 al di fuori). Quest'ultima permette la considerazione di un reticolo che copra completamente una data regione estesa.

Vogliamo postulare una densità di probabilità del tipo

$$p(\vartheta_{f_1}, \vartheta_{f_2}, \dots; \sigma_{1h_{11}}, \sigma_{1h_{12}}, \dots; \sigma_{2h_{21}}, \sigma_{2h_{22}}, \dots; \dots; t_b, t_a; \widehat{W}_a) \quad , \quad (3.4)$$



per un numero finito di funzioni peso, che possono appunto ricoprire completamente una regione limitata dello spazio-tempo ma anche essere scelte in maniera arbitraria, purché all'interno dell'intervallo di tempo indicato. Tale grandezza sarà espressa in funzione degli operatori quantistici  $\hat{T}_{\mu\nu}(x)$ ,  $\hat{J}_{k\mu}(x)$ ,  $\hat{\gamma}_{\rho\sigma}(x)$  e di un operatore densità  $\hat{W}_a$  che verrà definito di seguito ed esprime le conoscenze che noi abbiamo sull'universo prima del tempo  $t_a$ . Per  $t_a = -\infty$  ovviamente dovremo porre  $\hat{W}_a = \hat{W}_{\text{in}} = |0\rangle\langle 0|$ .

Per semplicità di scrittura e per render più trasparenti le formule, terremo tuttavia da questo momento traccia solo del più problematico tensore energia-momento, l'inclusione esplicita delle correnti essendo successivamente immediata.

Troviamo conveniente definire la (3.4) attraverso un funzionale generatore. Introduciamo perciò l'espressione

$$L[\xi; t_b, t_a; \hat{W}_a] = \text{Tr} \{ \mathcal{G}[\xi; t_b, t_a] \hat{W}_a \}, \quad (3.5)$$

dove,

$$\mathcal{G}[\xi; t_b, t_a] = \text{T exp} \int_{t_a}^{t_b} d^4x \mathcal{K}(x; \xi(x)) \quad (3.6)$$

con

$$\mathcal{K}(x; \xi(x)) \hat{W} = \frac{1}{2} \left\{ -i\xi^{\mu\nu}(x) \hat{T}_{\mu\nu}(x) - \frac{\mu^4}{2} [-\hat{\gamma}(x)]^{\frac{1}{2}} \hat{\gamma}_{\mu\rho}(x) \hat{\gamma}_{\nu\sigma}(x) \xi^{\mu\nu}(x) \xi^{\rho\sigma}(x), \hat{W} \right\}. \quad (3.7)$$

In quest'ultima abbiamo indicato con  $\{\hat{A}, \hat{B}\}$ , come di consueto, l'anticommutatore  $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ , con T la prescrizione di ordinamento temporale e con  $\mu$  una costante con le dimensioni di una massa.

Postuliamo allora

$$p(\vartheta_{f_1}, \vartheta_{f_2}, \dots; t_b, t_a; \hat{W}_a) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int dk_1 \dots dk_n \exp(i \sum_s k_s \vartheta_{f_s}) \cdot L[\sum_s k_s f_s; t_b, t_a; \hat{W}_a]. \quad (3.8)$$

Ovviamente perché questa equazione abbia un senso è necessario che gli integrali sulle  $k_s$  siano convergenti. Questo comporta delle restrizioni sulla scelta delle funzioni peso. Così all'ordine 0 nel campo gravitazionale  $\hat{h}_{\mu\nu}(x)$ , la matrice

$$M_{ij}(\bar{g}_{\mu\nu}) = \frac{\mu^4}{2} \int d^4x [-\bar{g}(x)]^{-1/2} \bar{g}_{\mu\rho}(x) \bar{g}_{\nu\sigma}(x) f_i^{\mu\nu}(x) f_j^{\rho\sigma}(x) \quad (3.9)$$

e conseguentemente I suoi termini diagonali devono essere positivi (la matrice stessa può essere sempre supposta diagonale). E' chiaro allora che la (3.8) non potrà dare alcuna informazione sulle componenti  $t_{0j}$  del tensore di energia-momento e similmente, includendo le correnti, su quelle temporali  $J_{k0}$ . Queste grandezze possono essere comunque sempre determinate in funzione delle altre componenti dalle equazioni di conservazione (2.3).

Il postulato (3.8) è suggerito dal formalismo del rif. [11], ma può essere giustificato in modo diretto dalle proprietà dell'espressione introdotta.

Dalla relazione generale

$$\langle \vartheta_{f_1} \vartheta_{f_2} \dots \rangle = \int d\vartheta_{f_1} d\vartheta_{f_2} \dots p(\vartheta_{f_1}, \vartheta_{f_2}, \dots; t_b, t_a; \hat{W}_a) \vartheta_{f_1} \vartheta_{f_2} \dots = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial k_1} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial k_2} \dots L[\sum_s k_s f_s, \dots; t_b, t_a; \hat{W}_a]_{k_1=k_2=\dots=0}, \quad (3.10)$$

si trae in particolare per i valori di aspettazione

$$\langle \vartheta_f \rangle = \langle \hat{T}_f \rangle_Q, \quad (3.11)$$

con

$$\hat{T}_f = \int d^4x f^{\mu\nu}(x) \hat{T}_{\mu\nu}(x) \quad (3.12)$$

di nuovo con  $\langle \hat{A} \rangle_Q = \text{Tr}(\hat{A} \hat{W}_a)$ , e per le varianze

$$\langle (\vartheta_f - \langle \vartheta_f \rangle)^2 \rangle = \langle (\hat{T}_f - \langle \hat{T}_f \rangle_Q)^2 \rangle_Q + \frac{\mu^4}{4} \int d^4x \langle (-\hat{\gamma})^{-\frac{1}{2}} \hat{\gamma}_{\mu\rho} \hat{\gamma}_{\nu\sigma} \rangle_Q f^{\mu\nu}(x) f^{\rho\sigma}(x), \quad (3.13)$$

Le equazioni (3.11-13) mostrano la relazione tra le quantità classiche e i corrispondenti operatori quantistici. Il secondo termine nelle (3.13)

deriva dal termine quadratico nella (3.7) che è stato introdotto per rendere la matematica ben definita. La quantità  $\mu$  può essere posta uguale a 0 nel risultato finale; va comunque supposta molto piccola.

Osserviamo ancora che se integriamo l'espressione (3.8) rispetto a una parte degli argomenti otteniamo la corrispondente espressione negli argomenti restanti

$$\begin{aligned} & \int d\vartheta_{f_1} \dots d\vartheta_{f_m} p(\vartheta_{f_1}, \dots, \vartheta_{f_m}, \dots; t_b, t_a; \widehat{W}_a) = \\ & \frac{1}{(2\pi)^n} \int dk_1 \dots dk_n (2\pi)^m \prod_{s=1}^m \delta(k_s) \exp \\ & \left( i \sum_{s=m+1}^n k_s \vartheta_{f_s} \right) L \left[ \sum_{s=m+1}^n k_s \vartheta_{f_s}; t_b, t_a; \widehat{W}_a \right] = \\ & p(\vartheta_{f_{m+1}}, \vartheta_{f_{m+2}}, \dots; t_b, t_a; \widehat{W}_a). \end{aligned} \quad (3.14)$$

In particolare, poiché

$$L(0; t_b, t_a; \widehat{W}_a) = 1, \quad (3.15)$$

si ha, come deve essere,

$$\int d\vartheta_{f_1} d\vartheta_{f_2}, \dots, d\vartheta_{f_p} p(\vartheta_{f_1}, \vartheta_{f_2}, \dots, \vartheta_{f_n}; t_b, t_a; \widehat{W}_a) = 1. \quad (3.16)$$

Supponiamo ora invece  $t_a = -\infty$ , che  $f_1, f_2, \dots, f_m$  corrispondano a posizioni spazio-temporali nella regione  $t < t_c$  con  $t_c < t_b$  e  $f_{m+1}, f_{m+2}, \dots$  a posizioni nell'intervallo  $t_c < t < t_b$ . Supponiamo anche che  $\vartheta_{f_1}, \dots, \vartheta_{f_m}$ , abbiano effettivamente assunto valori attorno a  $\bar{\vartheta}_{f_1}, \dots, \bar{\vartheta}_{f_m}$ . Tenuto conto dell'identità

$$\mathcal{G}[t_b, -\infty; \xi] = \mathcal{G}[t_b, t_c; \xi] \mathcal{G}[t_c, -\infty; \xi], \quad (3.17)$$

abbiamo allora per la probabilità condizionale

$$\begin{aligned} & p(\bar{\vartheta}_{f_1}, \dots, \bar{\vartheta}_{f_m} \mid \vartheta_{f_{m+1}}, \vartheta_{f_{m+2}}, \dots) = \\ & \frac{p(\bar{\vartheta}_{f_1}, \dots, \bar{\vartheta}_{f_m}, \vartheta_{f_{m+1}}, \vartheta_{f_{m+2}}, \dots; t_b, -\infty; \widehat{W}_{in})}{p(\bar{\vartheta}_{f_1}, \dots, \bar{\vartheta}_{f_m}; t_c, -\infty; \widehat{W}_{in})} = \\ & p(\vartheta_{f_{m+1}}, \vartheta_{f_{m+2}}, \dots; t_b, t_c; \widehat{W}_c), \end{aligned} \quad (3.18)$$

avendo posto

$$\widehat{W}_c = \frac{\frac{1}{(2\pi)^m} \int dk_1 dk_2 \dots dk_m \exp(i \sum_{s=1}^m k_s \bar{\vartheta}_{f_s}) \mathcal{G}[t_c, -\infty; \sum_{s=1}^m k_s f_s] \widehat{W}_{in}}{\frac{1}{(2\pi)^n} \int dk_1 dk_2 \dots dk_n \exp(i \sum_{s=1}^n k_s \bar{\vartheta}_{f_s}) \text{Tr}\{\mathcal{G}[t_c, -\infty; \sum_{s=1}^n k_s f_s] \widehat{W}_{in}\}}. \quad (3.19)$$

E' questa la forma che nel contesto prende la riduzione dello stato e ci mostra quale deve essere l'operatore densità che compare nelle (3.4) e nelle relazioni seguenti.

Osserviamo che la (3.19) mostra in particolare, come preannunciato, che l'operatore densità  $\widehat{W}_a$  riflette tutto ciò che sappiamo, espresso dai valori  $\bar{\vartheta}_{f_1}, \dots, \bar{\vartheta}_{f_m}$  delle quantità  $\vartheta_{f_1}, \dots, \vartheta_{f_m}$ , sulla effettiva storia del mondo che ci circonda prima del tempo  $t_a$ , incluse ovviamente le grandi strutture che in esso si siano formate, gli oggetti, le stesse apparecchiature sperimentali di cui disponiamo. Essa mostra anche il carattere positivo della stessa espressione sempre se  $\widehat{W}_a$ , come stiamo supponendo, è del tipo definito dalla (3.19) poiché tale è  $p(\vartheta_{f_1}, \vartheta_{f_2}, \dots; t_b, -\infty; \widehat{W}_{in})$ , come risulta immediatamente, ad esempio, dalla sua riscrittura nel formalismo funzionale.

Ritorniamo ora sulla (3.13). Se poniamo a zero o comunque trascuriamo il secondo termine di quest'ultima i valori di aspettazione e varianze per le variabili macroscopiche relative alla distribuzione di probabilità definita dalla (3.8), si identificano con le corrispondenti espressioni quantistiche. Se per un sistema che occupa una certa regione le varianze sono piccole sulla scala considerata, come accade per i sistemi di molti componenti identici in equilibrio locale considerati in Meccanica Statistica, tali grandezze hanno valori praticamente determinati e coincidenti con i valori di aspettazione quantistici. Come abbiamo detto in questo caso siamo nell'ambito di validità della Fisica Classica. Se poi i valori di aspettazione quantistici si possono spezzare in più componenti corrispondenti a diverse fasi o composizione chimica in interazione tra loro, lo stesso può essere fatto per le grandezze macroscopiche e ritroviamo l'usuale termodinamica di non equilibrio.

In circostanze in cui invece le varianze (3.13) sono confrontabili con i quadrati dei valori di aspettazione, siamo in presenza dell'effettivo emergere del sottostante livello quantistico. Ciò accade tipicamente in presenza di qualche particella come abbiamo detto "fuori dal coro" di quelle che costituiscono le strutture macroscopiche presenti. Come è intuitivo, in tal caso, se è effettivamente possibile realizzare una

situazione come quella configurata da von Neumann, si ritrovano le usuali regole della Teoria Quantistica ordinaria.

#### 4. RICUPERO DELLA ORDINARIA TEORIA QUANTISTICA

Sia  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$  un insieme di variabili macroscopiche relative a differenti posizioni (piccole regioni) nello spazio ma al medesimo tempo (piccolo intervallo di tempo). Siano esse per esempio le cariche elettriche di un sistema di contatori distribuiti su un intero angolo solido in un esperimento di scattering. Siano soddisfatte le equazioni di von Neumann (1.1) con autostati  $\Psi_s$  corrispondenti a differenti praticamente ben definiti valori delle suddette costanti. Questo significa che per  $\widehat{W} = |\Psi_{s'} \rangle \langle \Psi_{s'}|$  che si suppone la densità di probabilità

$$p(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots; \widehat{W}) \quad (4.1)$$

fortemente piccata in corrispondenza di un certo insieme di valori  $\vartheta'_1, \vartheta'_2, \dots$  (tutti i contatori carichi tranne il contatore  $s'$  scarico) e per  $\widehat{W} = |\Psi_{s''} \rangle \langle \Psi_{s''}|$ , con  $s'' \neq s'$ , piccata attorno a differenti valori  $\vartheta''_1, \vartheta''_2, \dots$  (tutti i contatori carichi meno  $s''$ , mentre per  $s = 0$  tutti i contatori sono supposti carichi. ). Per la linearità dell'espressione (4.1) in  $\widehat{W}$  (v. (3.8)) abbiamo

$$p(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots; \sum_{s s'} c_s c_{s'}^* |\psi_s \Psi_s \rangle \langle \psi_{s'} \Psi_{s'}|) = \sum_s |c_s|^2 p(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots; |\psi_s \Psi_s \rangle \langle \psi_s \Psi_s|) + \sum_{s \neq s'} c_s c_{s'}^* p(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots; |\psi_s \Psi_s \rangle \langle \psi_{s'} \Psi_{s'}|). \quad (4.2)$$

Secondo la congettura generale di Jordan e le argomentazioni del riferimento [7], l'ultimo termine può essere supposto trascurabile. La (4.2) corrisponde allora ad una alternativa tra i sistemi di valori di picco nelle  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$  corrispondenti ai vari specifici  $s$  (il contatore che si è scaricato mentre gli altri sono rimasti carichi) con probabilità  $|c_s|^2$  per l'alternativa  $s$ . E' chiaro tuttavia che nel contesto una sola delle alternative deve in concreto effettivamente realizzarsi indipendentemente da ogni ulteriore osservazione perché le  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$  devono essere sempre supposte avere un ben determinato valore (uno solo dei contatori deve

scattare, la particella è sempre osservata ad un angolo determinato) e quindi senza incontrare le difficoltà di von Neumann.

## 5. INFLAZIONE E FLUTTUAZIONI NELLA CMB

Consideriamo ora il problema dell'inflazione e delle conseguenti fluttuazioni nella CMB, come si presenta nel nostro contesto. Ciò che è specifico al modello cosmologico da noi adottato è la scelta del potenziale, il big bang a  $t = -\infty$  e le condizioni iniziali (2. 9,14). Ciò ha effetti solo sulle grandezze  $\bar{\varphi}(t)$  e  $a(t)$ . Quando queste sono calcolate, allo studio delle fluttuazioni che dovrebbero verificarsi, come conseguenza dalla natura quantistica dei campi  $\hat{\chi}(x)$  e  $\hat{h}_{\mu\nu}(x)$ , si possono applicare metodi standard, come quelli riportati nei rif. [12,13], con risultati simili a quelli ottenuti con modelli più usuali.

Trascurando asintoticamente per  $t = -\infty$  il contributo degli altri campi, consideriamo le equazioni di Eulero per l'azione

$$S_\gamma[\gamma_{\mu\nu}] + S_\varphi[\gamma_{\mu\nu}, \varphi] . \quad (5.1)$$

Abbiamo

$$\partial_\rho(\sqrt{-\gamma} \gamma^{\rho\sigma} \partial_\sigma \varphi) - \sqrt{-\gamma} V'(\varphi) = 0 , \quad (5.2)$$

$$R_{\mu\nu}(\gamma_{\rho\sigma}) - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu} R(\gamma_{\rho\sigma}) = -8\pi G T_{\varphi \mu\nu}(\gamma_{\rho\sigma}; \varphi), \quad (5.3)$$

che dobbiamo reinterpretare come equazioni operatoriali, ponendo  $\hat{\varphi}(x) = \bar{\varphi}(t) + \hat{\chi}(x)$  e  $\hat{\gamma}_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(t) + \hat{h}_{\mu\nu}(x)$  (eq. (2.10,11)).

All'ordine zero in  $\hat{\chi}$  e  $\hat{h}_{\mu\nu}$ , per  $\varphi(x) = \bar{\varphi}(t)$  e  $\gamma_{\rho\sigma}(x) = \bar{g}_{\rho\sigma}(t)$  queste si riducono alle equazioni puramente classiche (c-numeriche)

$$\ddot{\bar{\varphi}}(t) + 3H(t) \dot{\bar{\varphi}}(t) + V'(\bar{\varphi}(t)) = 0 , \quad (5.4)$$

$$H(t) = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \left( \frac{1}{2} \dot{\bar{\varphi}}^2(t) + V(\bar{\varphi}(t)) \right)} , \quad (5.5)$$

dove  $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$  è la “costante” di Hubble-Lemaitre al tempo  $t$ . Queste ovviamente coincidono con le (2.12,13) e descrivono l’aspetto dominante dell’inflazione.

Le soluzioni asintotiche di queste che si annullano per  $t \rightarrow -\infty$  sono

$$\bar{\varphi} = c e^{\alpha t}, \quad a = \bar{a} e^{\bar{H}t}, \quad (5.6)$$

dove

$$\bar{H} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \frac{\kappa^4}{4\lambda}}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \left( -3\bar{H} + \sqrt{9\bar{H}^2 + 4\kappa^2} \right), \quad (5.7)$$

essendo  $\bar{H}$  il limite della  $H(t)$  per  $t \rightarrow -\infty$ , limite finito con la nostra scelta del potenziale  $V(\varphi)$ . Le costanti  $\bar{a}$  e  $c$  non sono significative dal punto di vista fisico e possono essere fissate in modo arbitrario. La prima può essere sempre riassorbita in una ridefinizione delle coordinate spaziali e la supporremo scelta in modo che risulti secondo una generale convenzione  $a(t_0) = 1$ , con  $t_0$  che rappresenta il tempo presente. La seconda semplicemente fissa l’origine dei tempi; può infatti essere sempre ridefinita ponendo  $c = c' e^{-\alpha t_1}$ . Scegliamo  $c = v = \frac{\kappa}{\sqrt{\lambda}}$ .

Nelle *Figg. 3 e 4* sono riportati i grafici di  $\bar{\varphi}(t)$  e  $H(t)$  per la soluzione numerica del sistema (5.4,5) soddisfacenti le (5.6) per i valori adottati dei parametri del potenziale (vedi dopo). La grandezza  $\bar{\varphi}(t)$  cresce da 0 fino al valore  $v = 25,7 \times 10^{19}$  GeV verso cui poi si porta con oscillazioni smorzate. Corrispondentemente  $H(t)$  va da  $\bar{H}$  a 0 e quindi  $a(t)$  da 0 a una costante  $a_1$ . Il tempo  $t_1 \sim 3 \times 10^{-12}$  GeV $^{-1} \sim 2 \times 10^{-36}$  sec a cui queste circostanze si verificano si può considerare quello della fine dell’inflazione e in particolare si può scrivere

$$a(t) = a_1 \exp \int_{t_1}^t dt' H(t'). \quad (5.8)$$



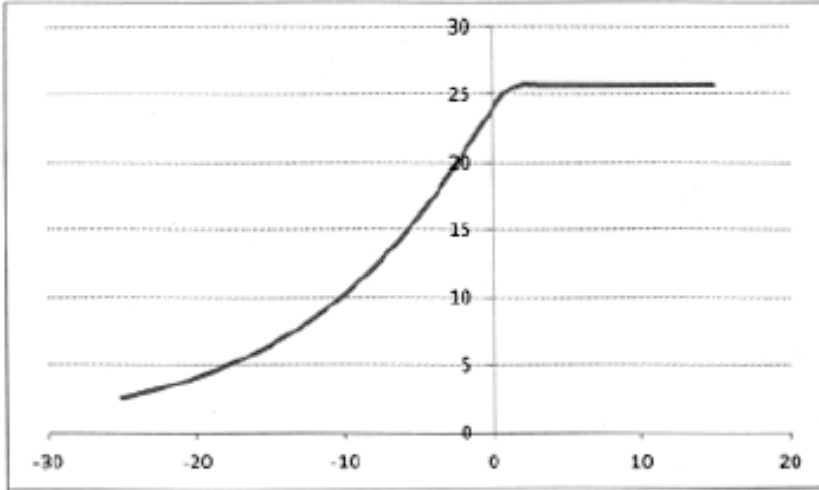


Fig. 3. Grafico della  $\bar{\varphi}(t)/10^{19}$  GeV in funzione di  $t/10^{-12}$  GeV $^{-1}$ , per  $\kappa = 8.38 \times 10^{12}$  GeV e  $\lambda = 1.05 \times 10^{-15}$  (v. (1.17)). Valore limite:  $\bar{\varphi} = v = 25,7 \times 10^{19}$  GeV.

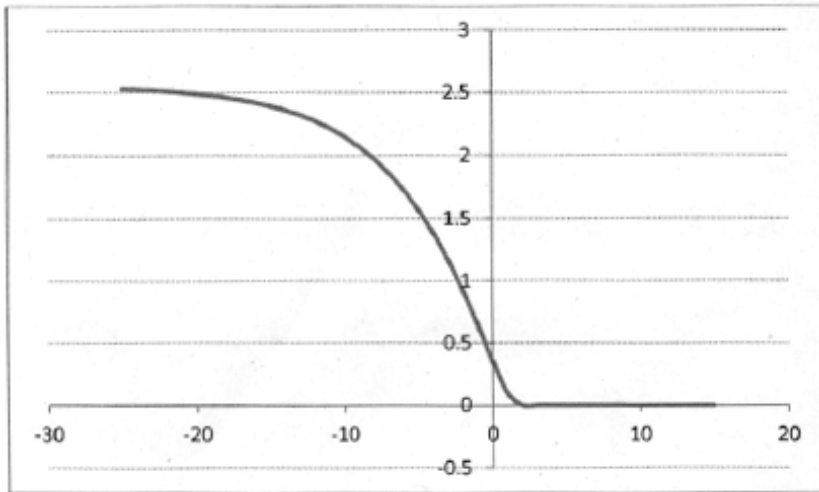


Fig. 4. Grafico della  $H(t)/10^{14}$  GeV in funzione di  $t/10^{-12}$  GeV $^{-1}$ , per I medesimi valori di  $\kappa$  e di  $\lambda$ . Notare  $\bar{H} = 2.53 \times 10^{14}$  GeV e  $t_1 \sim 3 \times 10^{-12}$  GeV $^{-1}$

Similmente l'inizio dell'inflazione si può porre attorno a  $t \sim -20 \times 10^{-12} \text{ GeV}^{-1} \sim 10^{-35} \text{ sec}$  e quindi la durata della stessa risulta dell'ordine dell'ultima cifra.

Per studiare le successive le correzioni al primo ordine del processo sopra descritto conviene porsi in un gauge particolare. Nel cosiddetto gauge di Newton (rif. [12, cap. 5]) possiamo scrivere

$$h_{00} = -2\Phi, \quad h_{0j} = a G_j, \quad h_{ij} = a^2 (-2\Psi\delta_{ij} + D_{ij}), \quad (5.9)$$

dove  $\Phi$  e  $\Psi$  sono scalari in 3-dimensioni,  $G_j$  è un vettore e  $D_{ij}$  un tensore del secondo ordine che soddisfano le condizioni

$$\partial_j G_j = 0, \quad \partial_i D_{ij} = 0, \quad D_{ij} = D_{ji}, \quad D_{jj} = 0 \quad . \quad (5.10)$$

Dall'eq. (5.2) allora abbiamo

$$\ddot{\chi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\chi} + V''(\bar{\varphi})\chi - \frac{\nabla^2}{a^2}\chi = -2\hat{\Phi}V'(\bar{\varphi}) + (\hat{\Phi} + 3\hat{\Psi})\dot{\bar{\varphi}}. \quad (5.11)$$

Dalle (5.3) può essere invece ottenuto un insieme di equazioni che possono essere riorganizzate nel modo seguente (rif. [12, cap. 5 e 10]):

1) modo scalare

$$\partial_i \partial_j (\hat{\Phi} - \hat{\Psi}) = 0 \quad (5.12)$$

$$\dot{a} \partial_i \hat{\Phi} + a \partial_i \dot{\hat{\Psi}} = 4\pi G a \dot{\bar{\varphi}} \partial_i \dot{\chi} \quad (5.13)$$

$$\left( \dot{H} - \frac{\nabla^2}{a^2} \right) \hat{\Psi} = 4\pi G (\ddot{\bar{\varphi}} \dot{\chi} - \dot{\bar{\varphi}} \dot{\chi}) \quad , \quad (5.14)$$

2) modo vettoriale

$$\partial_i \left( a \dot{\hat{G}}_j + 2 \dot{a} \hat{G}_j \right) = 0 \quad , \quad (5.15)$$

3) modo tensoriale

$$\ddot{\hat{D}}_{ij} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\hat{D}}_{ij} - \frac{\nabla^2}{a^2}\hat{D}_{ij} = 0 \quad . \quad (5.16)$$

L'eq. (5.15) ha soluzioni che si annullano rapidamente al crescere del tempo e sono di regola trascurate (rif. [12, Chap. 5]).

Dall'eq. (5.12) segue  $\widehat{\Phi} = \widehat{\Psi}$  e, poiché i coefficienti delle relative equazioni dipendono solo dal tempo,  $\hat{\chi}(t, \mathbf{x})$  e  $\widehat{\Psi}(t, \mathbf{x})$  possono essere sviluppati in integrali di Fourier nelle coordinate spaziali e le soluzioni generali del sistema (5.11-14) possono essere scritte nella forma

$$\hat{\chi}(x) = \int d^3 \mathbf{q} \left( \widehat{\alpha}(\mathbf{q}) \chi_q(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} + \widehat{\alpha}^+(\mathbf{q}) \chi_q^*(t) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \right) \quad (5.17)$$

$$\widehat{\Psi}(x) = \int d^3 \mathbf{q} \left( \widehat{\alpha}(\mathbf{q}) \Psi_q(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} + \widehat{\alpha}^+(\mathbf{q}) \Psi_q^*(t) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \right), \quad (5.18)$$

dove le “costanti”  $\widehat{\alpha}(\mathbf{q})$  e  $\widehat{\alpha}^+(\mathbf{q})$  vanno interpretate come operatori mentre  $\chi_q(t)$  e  $\Psi_q(t)$  sono soluzioni c-numeriche di equazioni formalmente identiche alle (5.11-14) ma con la sostituzione  $\partial_j \rightarrow i q_j$ . Se queste ultime sono normalizzate in maniera appropriata, dalle relazioni di commutazione canonica per  $\hat{\chi}(x)$  e  $\hat{\dot{\chi}}(x)$  si ha

$$[\widehat{\alpha}(\mathbf{q}), \widehat{\alpha}(\mathbf{q}')] = [\widehat{\alpha}^+(\mathbf{q}), \widehat{\alpha}^+(\mathbf{q}')] = 0, \quad [\widehat{\alpha}(\mathbf{q}), \widehat{\alpha}^+(\mathbf{q}')] = \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \quad (5.19)$$

e  $\widehat{\alpha}^+(\mathbf{q})$  e  $\widehat{\alpha}(\mathbf{q})$  acquistano il significato di operatori di creazione e distruzione di *inflaton*i, i quanti del campo  $\hat{\chi}(x)$ .

Similmente la soluzione generale della (5.16) può essere scritta

$$\widehat{D}_{ij}(x) = \sum_{s=1}^2 \int d^3 \mathbf{q} \left( \widehat{\beta}_s(\mathbf{q}) D_{ijqs}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} + \widehat{\beta}_s^+(\mathbf{q}) D_{ijqs}^*(t) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \right), \quad (5.20)$$

dove

$$D_{ijqs}(t) = e_{sij}(\mathbf{q}) D_q(t), \quad (5.21)$$

essendo  $e_{1ij}(\mathbf{q})$  e  $e_{2ij}(\mathbf{q})$  tensori di polarizzazione che soddisfano le condizioni

$$e_{ij} = e_{ji}, \quad e_{ii} = 0, \quad q_i e_{ij} = 0, \quad e_{sij} e_{s'i'}^{ij} = \delta_{ss'}.$$

Di nuovo, se  $D_q(t)$  è normalizzato in maniera appropriata, dalle regole di commutazione canonica per  $\widehat{D}_{ij}(x)$  e  $\widehat{\dot{D}}_{ij}(x)$  otteniamo

$$\begin{aligned} [\hat{\beta}_s(\mathbf{q}), \hat{\beta}_{s'}(\mathbf{q}')] &= [\hat{\beta}_s^+(\mathbf{q}), \hat{\beta}_{s'}^+(\mathbf{q}')] = 0, \\ [\hat{\beta}_s(\mathbf{q}), \hat{\beta}_{s'}^+(\mathbf{q}')] &= \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \end{aligned} \quad (5.22)$$

e  $\hat{\beta}_s^+(\mathbf{q})$  e  $\hat{\beta}_s(\mathbf{q})$  divengono operatori di creazione e distruzione di *gravitoni* nello stato di polarizzazione  $s$ .

Importanti cambiamenti si ritiene in generale che si siano verificati nell'universo per  $t > t_1$ . Nel nostro contesto in particolare la crescita di  $\bar{\varphi}(t)$  da 0 a  $v$  e quella conseguente di  $a(t)$  da 0 a  $a_I$  portano a una ridefinizione dello stato di vuoto, alla creazione di inflatoni [16, chap. 2] ed eventualmente di gravitoni, se questi esistono. Successivamente gli inflatoni dovranno decadere in particelle più leggere. Si ammette comunque che alla fine dell'inflazione sia presente una miscela di materia oscura non relativistica, fotoni, neutrini, gravitoni e plasma barionico (una miscela di materia ordinaria, ioni, barioni, elettroni). Al periodo dominato dal campo inflatonico dovrebbe quindi seguirne un altro dominato da materia e radiazione e conseguentemente  $a(t)$  in realtà non fermarsi ad un valore costante ma continuare a crescere come  $t^{2/3}$  o  $t^{1/2}$  e  $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$  non andare immediatamente a 0, ma da un certo momento in poi continuare a decrescere come  $1/t$ .

In conseguenza di tali processi per ogni  $q$  compaiono due radici  $t_{1q}$  e  $t_{2q}$  dell'equazione  $\frac{q}{a(t)} = H(t)$  che rivestono grande importanza. La prima radice si presenta per  $t < t_1$ , perché lontano nel passato la quantità  $\frac{q}{a(t)}$  diviene infinitamente grande mentre  $H(t)$  va ad una costante, ma poi al crescere di  $t$ , decresce più rapidamente di  $H(t)$  (v. fig. 3). La seconda si presenta per  $t > t_1$ , quando per la dominanza della radiazione e della materia la situazione si rovescia.

Venendo alle fluttuazioni indotte sulla CMB, per le fluttuazioni scalari è particolarmente significativa la grandezza

$$R_q(t) = - \Psi_q(t) + \frac{H(t)}{\bar{\varphi}(t)} \chi_q(t) . \quad (5.23)$$

Per  $t_{1q} < t < t_{2q}$  questa diviene indipendente da  $t$ , e il suo limite  $R_q^0$  interviene nelle condizioni iniziali per l'evoluzione delle fluttuazioni scalari dopo  $t_{2q}$ . Similmente nello stesso intervallo di tempo diviene

indipendente dal tempo la grandezza  $D_q(t)$  e il suo limite  $D_q^0$  determina la successiva evoluzione delle fluttuazioni tensoriali.

Risolvendo le equazioni per  $\chi_q(t)$  e  $D_q(t)$  nella cosiddetta approssimazione dello “slow roll” (rotolamento lento), si trova [12, cap. 7, 10]

$$[R_q^0]^2 = \frac{G H^2(t_{1q})}{4\pi^2 \epsilon(t_{1q})} q^{-3} \cong [N_S]^2 q_R^{-3} \left(\frac{q}{q_R}\right)^{-4+n_S}, \quad (5.24 \text{ a})$$

$$[D_q^0]^2 = \frac{G H^2(t_{1q})}{\pi^2} q^{-3} \cong [N_T]^2 q_R^{-3} \left(\frac{q}{q_R}\right)^{-3+n_T}, \quad (5.24 \text{ b})$$

con

$$[N_S]^2 = \frac{G H^2(t_{1q_R})}{4\pi^2 \epsilon(t_{1q_R})}, \quad [N_T]^2 = \frac{G H^2(t_{1q_R})}{\pi^2}, \quad (5.25)$$

$$n_S = 1 - 4\epsilon(t_{1q_R}) - 2\delta(t_{1q_R}) \quad n_T = -2\epsilon(t_{1q_R}), \quad (5.26)$$

e

$$\epsilon(t) = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'(\bar{\varphi}(t))}{V(\bar{\varphi}(t))}\right)^2, \quad \delta(t) = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'^2(\bar{\varphi}(t))}{V^2(\bar{\varphi}(t))} - 2\frac{V''(\bar{\varphi}(t))}{V(\bar{\varphi}(t))}\right). \quad (5.27)$$

e si può scegliere ad esempio

$$q_R = 0.05 \text{ Mpc}^{-1} = 3.193 \times 10^{-40} \text{ GeV}. \quad (5.28)$$

Particolarmente significative dal punto di vista sperimentale sono le correlazioni angolari delle fluttuazioni nella CMB temperatura-temperatura, temperatura-polarizzazione e polarizzazione-polarizzazione. Queste possono essere espresse dai coefficienti dei loro sviluppi in armoniche sferiche o loro generalizzazioni,  $C_{TTl}$ ,  $C_{TEl}$ ,  $C_{EEl}$ ,  $C_{BBl}$ , dove gli indici  $E$  e  $B$  si riferiscono a due diverse polarizzazioni, rispettivamente pari o dispari rispetto alle riflessioni spaziali. Per ragioni di simmetria  $[R_q^0]^2$  da contributo solo ai primi tre coefficienti, mentre l'ultimo dipende solo da  $[D_q^0]^2$

Per risolvere le complicate equazioni che, sotto le ipotesi sopra riportate, permettono di studiare l'evoluzione dopo  $t_{2q_R}$  delle varie componenti presenti nell'universo e conseguentemente calcolare i suddetti

coefficienti dati  $[R_q^0]^2$  e  $[D_q^0]^2$ , esistono programmi numerici standard. E' notevole che, se ignorando completamente  $[D_q^0]^2$ , assumiamo per  $[R_q^0]^2$  una semplice dipendenza a potenza del tipo della (5.24 a) e diamo a  $n_s$  e  $[N_s]^2$  appropriati valori, riusciamo a riprodurre i dati sperimentali per i primi tre coefficienti in un ampio intervallo di valori dell'indice  $l$  come  $30 \leq l \leq 2500$  con grande precisione. Non sono invece osservate fluttuazioni nella polarizzazione di tipo  $B$ .

Sulla base dei riferimenti [12] e [14] possiamo assumere

$$n_s = 0.966 \pm 0.003, \quad [N_s]^2 = 1.93 \pm 0.12 \cdot 10^{-10}. \quad (5.29)$$

Questi valori possono essere riottenuti dalle equazioni (5.25-27) e dalla risoluzione numerica del sistema (5.4,5), attribuendo ai parametri del potenziale i valori

$$\kappa = 8.38 \times 10^{12} \text{ GeV}, \quad \lambda = 1.05 \times 10^{-15} \quad (5.30)$$

e approssimando  $a_1$  con il valore di  $a(t)$  al tempo  $t_L$  dell'ultimo scattering, quando la radiazione si disaccoppia dalla materia. Sotto la convenzione  $a(t_0) = 1$ , a sua volta  $a(t_L)$  si esprime semplicemente in funzione del *redshift* della superficie della CMB  $a(t_L) = \frac{1}{z_L+1} \cong \frac{1}{1090}$ .

In particolare, assunte le (5.20), abbiamo (v. Fig. 5)

$$t_{1q_R} = -1.48 \times 10^{-12} \text{ GeV}^{-1}, \quad (5.31)$$

$$\bar{\varphi}(t_{1q_R}) = 21.46 \times 10^{19} \text{ GeV}, \quad H(t_{1q_R}) = 7.75 \times 10^{13} \text{ GeV} \quad (5.32)$$

e quindi

$$\varepsilon(t_{1q_R}) = 0.0054, \quad \delta(t_{1q_R}) = 0.0012. \quad (5.33)$$

Per il rapporto tra l'intensità delle fluttuazioni tensoriali e quelle scalari dovremmo allora avere

$$r(q_R) \equiv \frac{4[D_{q_R}^0]^2}{[R_{q_R}^0]^2} = 16 \varepsilon(t_{1q_R}) = 0.086. \quad (5.34)$$

Tuttavia una combinazione dei risultati della collaborazione Planck con quelli di altri esperimenti ha permesso di stabilire il limite sperimentale  $r < 0.032$  [15] al 95% di confidenza, in completo disaccordo con la previsione.

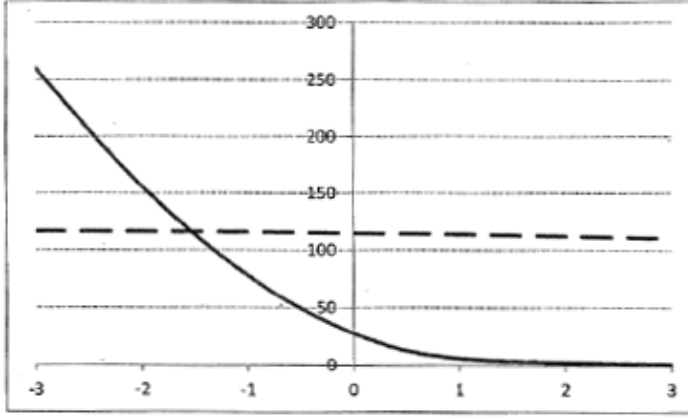


Fig. 5. Intersezione dei grafici: a) (linea tratteggiata)  $\ln \frac{H(t) a_I}{q_R} \equiv 116 + \ln \frac{H(t)}{10^{14} \text{ GeV}}$  ;  
 b) (linea solida)  $\int_t^{t_I} dt' H(t')$ ; in funzione di  $\frac{t}{10} \text{ GeV}^{-1}$ . Per interpolazione tra  $t = -2 \times 10^{-12} \text{ GeV}^{-1}$  e  $t = -1 \times 10^{-12} \text{ GeV}^{-1}$  :  $t_{1q_R} = -1,48 \times 10^{-12} \text{ GeV}^{-1}$ ,  $\bar{\varphi}(t_{1q_R}) = 21,46 \times 10^{19} \text{ GeV}$ ,  $H(t_{1q_R}) = 7,75 \times 10^{13} \text{ GeV}$

## 6. LA GRAVITÀ, FENOMENO PURAMENTE CLASSICO?

La difficoltà precedente non è tipica del modello adottato ma è comune praticamente a tutti i modelli inflazionari indipendentemente da ogni ragionevole scelta del potenziale  $V(\varphi)$ . Poiché le fluttuazioni tensoriali dovrebbero dipendere dalle fluttuazioni di vuoto, e dunque dalla natura quantistica del campo  $D_{ij}(x)$ , questa circostanza potrebbe, come detto, suggerire che la gravitazione sia un fenomeno puramente classico. Nella formulazione ordinaria questo è in linea di principio impossibile perché, se nell'equazione di Einstein il secondo membro è un operatore, deve esserlo il primo. Nel nostro contesto questo però può essere coerentemente ottenuto semplicemente sopprimendo il termine  $S_\gamma$  nella (2.5) e sostituendo ovunque nei termini che seguono  $\hat{\gamma}_{\rho\sigma}$  con la metrica classica  $g_{\rho\sigma}(x)$  definita dall'equazione (2.2).



Notiamo che in questo caso delle equazioni (5.11-16) sopravvive solo la prima con il secondo membro che però è ora una quantità c-numerica. Questa circostanza non modifica l'espressione per  $R_q^O$  che già era ottenuta trascurando tale termine (di ordine 0 in  $\frac{q}{a}$ ) fino al tempo  $t_{1q}$ . Così le fluttuazioni scalari restano le stesse mentre quelle tensoriali spariscono.

Naturalmente possiamo porre anche per la metrica classica  $g_{\rho\sigma}(x) = \bar{g}_{\rho\sigma}(x) + h_{\rho\sigma}(x)$ , dove però ora  $h_{\rho\sigma}(x)$  sarà un campo c-numerico puramente classico determinato dall'equazione (2.2). Al primo ordine in  $h_{\rho\sigma}$  abbiamo ancora equazioni formalmente analoghe alle (5.12-16) ma in cui ora le sorgenti sono espresse tramite componenti di  $t_{\rho\sigma}(x)$  [12 chap. 5]. In ogni caso, se non abbiamo informazioni su  $t_{\rho\sigma}$  dopo il tempo  $t_a$  possiamo ugualmente ottenere una stima della densità di probabilità  $p(\vartheta_{f_1}, \vartheta_{f_2}, \dots; t_b, t_a; \widehat{W}_a)$  rimpiazzando  $t_{\mu\nu}(x)$  con  $\langle \widehat{T}_{\mu\nu}(\bar{g}_{\rho\sigma}, x) \rangle_Q = \text{Tr} [\widehat{T}_{\mu\nu}(\bar{g}_{\rho\sigma}, x) \widehat{W}_a]$ , dove  $\widehat{W}_a$  rappresenta, come abbiamo visto, le informazioni che noi abbiamo prima del tempo  $t_a$ .

Due situazioni limite opposte sono tuttavia di particolare importanza. La prima nel caso della presenza di un piccolo numero di particelle, quindi nei problemi di fisica di queste ultime, quando  $h_{\rho\sigma}(x)$  è trascurabile, dato il valore molto piccolo della  $G$ , in confronto alla grandezza delle altre interazioni. In questo caso è appropriata l'approssimazione di ordine zero  $g_{\rho\sigma}(x) \cong \bar{g}_{\rho\sigma}(x)$ . La seconda è il limite di alta densità di particelle, come in presenza di grandi strutture quando è trascurabile la varianza del tensore di energia-momento e una trattazione puramente classica di  $t_{\rho\sigma}$  e  $g_{\rho\sigma}$ , come normalmente fatto nei problemi di carattere astrofisico, è pienamente giustificata.

## BIBLIOGRAFIA ESSENZIALE

1. G. M. Prospero and M. Baldicchi, *Eur. Phys. Jour.*, DOI: 10,1140/epjp13360-D24-05351-4 .
2. N. Bohr, in *Albert Einstein Philosopher-Scientist*, P. A. Schlip ed., p. 200, The library of Living Philosophers, Evaston (1949), reprinted in ref. [10].
3. A. Tonomara, *The Quantum World unveiled by electron waves*, World Scientific, Singapore (1998).
4. J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantumechanik*, cap. V and VI , Springer, Berlin (1932); English translation: *Mathematical Foundation of quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton N.J. (1955), reprinted in ref. [10].
5. P. Jordan, *Das Bild der Modern Physik*, Stromverlag, Hamburg (1943).
6. A. Daneri, A. Loinger and G. M. Prospero , *Nuclear Physics* , **44**, 297 (1962), (reprinted in rif. [9]); G. M. Prospero, in rif [8] , p. 97.
7. E. P. Wigner, in rif. [8], p. 1, p. 122.
8. B. D’Espagnat ed. , *Foundation of Quantum Mechanics*, , Academic Press, New York and London (1971).
9. J. A. Wheeler and W. H. Zurek, *Quantum Theory and Measurement*, Princeton University Press, Princeton N. J. (1981).
10. S. Kamefuchi *et al.* eds., *Proceedings of the international symposia “Foundation of Quantum Mechanics in the light of new technology”* (ISQM) 1-9, Tokio (1984-2009).
11. A. Barchielli, L. Lanz and G. M. Prospero, *Nuovo Cimento B* **72** (1982), 79; *Found. Phys.* **13** (1983), 779; G. M. Prospero, *Int. Jour. Theor. Phys.* **33** (1994) , 115.
12. S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, Oxford (2008).
13. V. Muchanov, *Physical Foundation of Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge (2005).
14. Planck Collaboration, *Astronomy & Astrophysics*, 641 A (2020).
15. M. Tristram et al, *Phys. Rev.* **D 105**, 083524 (2022).
16. L. E. Parker and D. J. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime*, Cambridge University Press, Cambridge (2009).

