 Istituto Lombardo (Rend. Scienze) 157, 135-146 (2023-2024)

ALLA SCOPERTA DI SCHEMI NASCOSTI NELLE DINAMICHE COMPLESSE: DAL PROBLEMA DEGLI N-CORPI ALLE RETI NEURALI (E RITORNO)

Nota di GIAN MARCO CANNEORI (*) e del s.c. SUSANNA TERRACINI (**)

(Adunanza del 9 novembre 2023)

SUNTO. – In questa nota presentiamo l'approccio teorico e computazionale che il nostro gruppo di ricerca sta sviluppando per ottenere evidenze di comportamenti caotici per il problema classico degli N-corpi in Meccanica Celeste. Ispirati dalla ormai nota congettura di Henri Poincaré, mostriamo come sia possibile determinare numericamente grandi insiemi di orbite periodiche e codificarle, rivelando l'esistenza di una dinamica simbolica. Infine, esploriamo una nuova idea che, impiegando algoritmi di IA, permetterà di combinare diverse orbite periodiche al fine di ottenere nuove soluzioni con ordine crescente di complessità. In questo contesto, rivediamo anche le applicazioni sulle orbite di trasporto interplanetario a bassa energia introdotte da Conley.

***

ABSTRACT. – In this note, we present the theoretical and computational approach our research group is developing to detect chaotic behaviours in the classical N-body problem of Celestial Mechanics. Inspired by the famous Poincaré conjecture, we numerically determine large sets of symmetric periodic orbits and we encode their simple motions by revealing the existence of a symbolic dynamics. Finally, we explore a new idea for combining periodic orbits to create new solutions with increasing complexity, using AI algorithms. We also revisit Conley's ideas on low-energy transport orbits.

(*) Dipartimento di Matematica "G. Peano", Università degli Studi di Torino, Italy. E-mail: gian.marco.canneori@gmail.com

(**) Dipartimento di Matematica "G. Peano", Università degli Studi di Torino, Italy. E-mail: susanna.terracini@unito.it

Il problema degli *N* corpi

Nel libro *Il problema dei 3 corpi* lo scrittore cinese Cixin Liu, descrivendo un mondo dove il susseguirsi delle stagioni, i mutamenti del clima e lo sviluppo di popolazioni immaginarie sono subordinati all'estrema complessità che caratterizza un sistema gravitazionale di questi 3 Soli, propone un approccio avvincente nel raccontare il caos deterministico a una platea non addetta ai lavori, citando con peculiare precisione le intricate definizioni matematiche che modellano il concetto di sistema dinamico caotico.

Il nostro gruppo di ricerca si dedica a un antico problema fisico-matematico che costituisce una generalizzazione del sistema di 3 Soli descritto da Cixin Liu: il *problema degli N-corpi*. Si tratta dello studio delle traiettorie di un numero N di corpi celesti nello spazio, soggetti esclusivamente alla reciproca attrazione gravitazionale e con masse costanti nel tempo.

Dal punto di vista matematico il moto di un sistema di corpi materiali è regolato da un sistema di equazioni differenziali ordinarie. Se indichiamo con $x_i\,(t)$ la posizione dell'i-esimo corpo nello spazio, l'accelerazione di quel corpo è data dalla velocità di variazione della sua velocità $(\dot{x}_i)(t)$, in definitiva, dalla derivata seconda della posizione rispetto al tempo:

$$\underbrace{m_i \ddot{x}_i}_{\text{massa} \times \text{accelerazione}} = \underbrace{F_i}_{\text{forza}}, \qquad i = 1, \dots, n$$

Il moto dei pianeti e degli altri corpi celesti è regolato dalla legge di Newton della gravitazione universale secondo cui la forza di attrazione gravitazionale di un corpo su un altro è diretta secondo la congiungente dei due corpi ed ha intensità proporzionale all'inverso del quadrato della distanza ed al prodotto delle masse.

La forza totale agente su di un corpo è uguale alla somma di tutte le forze di attrazione esercitate su questo dagli altri:

$$F_i = \sum_{j \neq i} F_{ij}, \qquad i = 1, \dots, n$$

Nel caso dei tre corpi si tratta del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = Gm_1m_2\dfrac{x_2-x_1}{\|x_2-x_1\|^3} + Gm_1m_3\dfrac{x_3-x_1}{\|x_3-x_1\|^3} \\ m_2\ddot{x}_2 = Gm_2m_1\dfrac{x_1-x_2}{\|x_1-x_2\|^3} + Gm_2m_3\dfrac{x_3-x_2}{\|x_3-x_2\|^3} \\ m_3\ddot{x}_3 = Gm_3m_1\dfrac{x_1-x_3}{\|x_1-x_3\|^3} + Gm_3m_2\dfrac{x_2-x_3}{\|x_2-x_3\|^3} \end{cases}$$

dove i numeri positivi m_i sono le masse dei corpi la cui posizione è rappresentata dai vettori tridimensionali

$x_i(t)$, funzioni del tempo t.

Se, grazie alla legge gravitazionale di Newton, siamo in grado di descrivere con formule semplici le traiettorie di due corpi, come potrebbero essere la Terra e la Luna, sorprendentemente, quando si sale a tre o più corpi la possibilità di descrivere con una formula matematica le loro traiettorie si perde. In altre parole, in questo caso le traiettorie sembrano evolvere senza uno schema preciso. Si parla allora di *sistema caotico*.

Quanto detto è stato osservato da Henri Poincaré, famoso matematico francese che, già a fine '800, ha formulato una congettura sulla caoticità di questo sistema. Si può pensare a un sistema caotico come a una coreografia segreta tra eventi o fenomeni, un intricato intreccio di imprevedibili mosse che, apparentemente casuali, nascondono un misterioso ordine da cui sono guidate; uno schema in cui un'impercettibile variazione può dare vita a risultati sorprendenti e anche molto diversi tra loro. C'è dunque un ordine segreto nel caos. Ma come si può cercare l'ordine nel caos del problema degli *N*-corpi?

Occorre anche verificare rigorosamente che quello degli *N*-corpi è davvero un sistema caotico, ma dimostrarlo in modo diretto è molto difficile. Un approccio intermedio consiste nell'identificare traiettorie via via sempre più complesse, che fungono da indicatori di una dinamica globale potenzialmente caotica.

Orbite periodiche

Il matematico che prima di tutti intuì l'importanza delle orbite periodiche per la comprensione della dinamica del problema degli *N*–corpi fu Henri Poincaré:

> *“D’ailleurs, ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c’est qu’elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissons essayer de pénétrer dans une place jusqu’ici réputée inabordable…”.*

Secondo Poincaré, tutte le traiettorie sono approssimate da quelle periodiche:

> *“…voici un fait que je n’ai pu démontrer rigoureusement, mais qui me parait pourtant très vraisemblable. Etant données des équations de la forme définie dans*[1] *le n. 13 et une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), ositive la différence entre les deux solutions soit aussi petite qu’on le veut, pendant un temps aussi long qu’on le veut.”*

Il prototipo di sistema caotico e la dinamica simbolica

Introduciamo lo shift di Bernoulli (spostamento a destra): un sistema dinamico nello spazio delle successioni

$T_r : \{0,1\}^{\mathbf{Z}} \quad \{0,1\}^{\mathbf{Z}} : (s_k) \quad T_r((s_k)) = (s_{k+1})$,

che sposta di un posto a destra gli elementi della successione:

$(\ldots, s_{-k}, \ldots, s_{-1}, s_0, s_1, \ldots, s_k \ldots) \quad (\ldots, s_{-k+1}, \ldots, s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{k+1} \ldots)$.

In questo spazio, punti sono successioni bi-infinite di zeri e uni:

$(s_k) = (\cdots, 0,1,1,1,0,0,1,0,0,1,1,0, \cdots)$

Fra due elementi di questo spazio possiamo definire la distanza:

$$d((s_k),(t_k)) \doteq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|k|}} |s_k - t_k|,$$

di modo che lo shift sia un omeomorfismo. L’*orbita* di $x=(s_k)$ è la successione delle iterate $(T_r^n(x))_n$, che possiamo identificare con x stesso. Fra le possibili orbite, riconosciamo le orbite periodiche semplici:

---

1 La formula n. 13 menzionata da Poincaré è l’equazione di Hamilton.

$(s_k) = (\cdots, 0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,\cdots)$ periodo 2

$(s_k) = (\cdots, 0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,0,\cdots)$ periodo 5.

Osserviamo la presenza di un'orbita densa, che cioè passa vicino ad ogni altra

$(s_k) = (\cdots,$
$0, \quad 1,$
$0,0, \quad 0,1, \quad 1,0, \quad 1,1,$
$0,0,0, \quad 0,0,1, \quad 0,1,0, \quad 1,0,0, \quad 1,0,1, \quad 1,1,0, \quad 1,1,1,$
$\cdots).$

Il sistema dinamico discreto *$(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, T_r)$* gode delle seguenti proprietà:

- ha un insieme denso e numerabile di orbite periodiche,
- ha un'elevata sensibilità rispetto alle condizioni iniziali,
- ha un'entropia topologica positiva.

Cosa significa *elevata sensibilità rispetto alle condizioni iniziali*? L'effetto farfalla, coniato da Edward Lorenz nel 1961, teorizza che un evento minuscolo, come un minuscolo battito d'ali di una farfalla in Amazzonia, potrebbe ipoteticamente mettere in moto una catena di eventi che potrebbe causare un tornado in Texas pochi giorni dopo. Nello stesso modo, una differenza di una cifra remota della nostra successione (appena rilevabile dalla nostra nozione di distanza), dopo un numero opportunamente grande di iterazioni, arriverà a trovarsi nella posizione zero, rendendo la distanza almeno unitaria.

Possiamo arricchire il nostro prototipo di sistema caotico considerando un insieme con più simboli S invece di due soltanto (zero e uno) e le successioni bi-infinite di elementi di questo insieme. Dato un sistema dinamico *(X,σ),* diremo che questo ammette una dinamica simbolica se esiste un sottosistema *(Π,σ)* ed una mappa suriettiva $\pi: \Pi \to S^{\mathbb{Z}}$ che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} \Pi \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & \Pi \arrow[d, "\pi"] \\ S^{\mathbb{Z}} \arrow[r, "T_r"] & S^{\mathbb{Z}} \end{tikzcd}$$

In altre parole il sottosistema dinamico *(Π,σ)* è semi-coniugato allo shift di Bernoulli con simboli *S*.

La fabbrica delle orbite

Nei primi anni 2000, insieme a Davide Ferrario abbiamo cominciato a sviluppato un software basato sui nostri risultati teorici, che ha ispirato questo progetto. Con questo strumento è possibile determinare alcune soluzioni del problema che rispettano dei vincoli di simmetria geometrica. Utilizzando questo software abbiamo creato un database di orbite semplici, ovvero soddisfacenti un unico vincolo di simmetria; ne è un esempio (citato anche dallo stesso Cixin Liu) il famoso "8" di Alain Chenciner e Richard Montgomery, dove 3 corpi della stessa massa si inseguono lungo una traiettoria a forma di 8 rovesciato (*Fig. 1*).

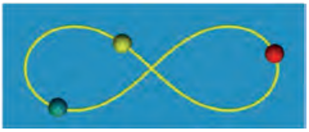

Fig. 1.

Le simmetrie dell'otto

Il più semplice del gruppo di simmetria che danno luogo all'otto si può definire come segue: le posizioni dei tre corpi si indicano con

$x(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$.

Allora il gruppo di simmetrie si genera attraverso le due seguenti riflessioni spazio–temporali: la prima delle quali è:

$x_1(-t)=-x_3(t), x_2(-t)=-x_2(t), x_3(-t)=-x_1(t)$

Notiamo che al tempo $t = 0$ il secondo corpo è nell'origine mentre il primo è opposto al terzo. La seconda simmetria è simile, ma scambia i ruoli del corpo due con il corpo tre:

$x_1(1-t)=-x_2(t), x_2(1-t)=-x_1(t), x_3(1-t)=-x_3(t)$

Stavolta, al tempo $t = 1$ il terzo corpo è nell'origine mentre il primo e il secondo si oppongono. Componendo le due riflessioni spazio-temporali con uno scambio otteniamo

$x_1(t-1)=x_1(-(1-t))=-x_3(1-t)=x_3(t)$

e analogamente

$x_2(t-1)=x_1(t),x_3(t-1)=x_2(t)$.

Cioè i tre corpi si inseguono sulla stessa curva.

SYMORB: UN SOFTWARE PER TROVARE LE ORBITE SIMMETRICHE

Ultimamente abbiamo continuato a perfezionare il software basato sui nostri risultati teorici e abbiamo iniziato un'esplorazione sistematica delle orbite con simmetrie spazio-temporali. Con questo strumento è stato possibile scoprire una grande quantità di soluzioni del problema dei 3-corpi che rispettano dei vincoli di simmetria geometrica. Utilizzando questo software abbiamo quindi creato un database orbite semplici, ovvero soddisfacenti un unico vincolo di simmetria, che costituiranno i mattoncini da cui partire per cercare le orbite più complesse (*Fig. 2*).

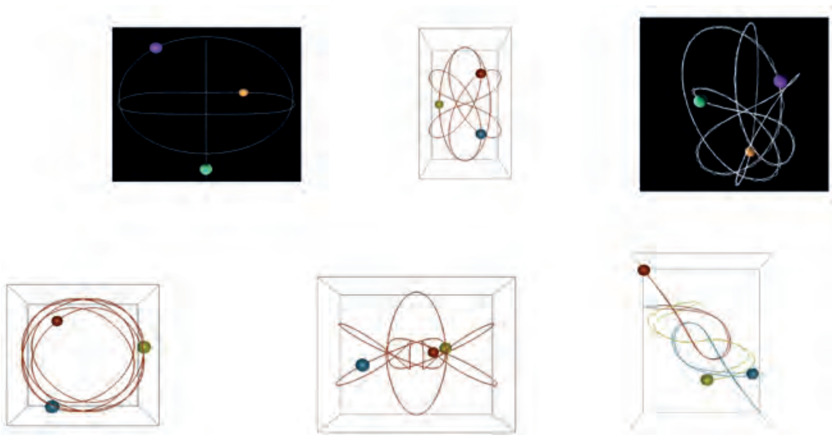

Fig. 2.

Come risultato preliminare abbiamo scoperto alcune orbite simmetriche già meno semplici di quanto ci si possa aspettare, dove vediamo i corpi impegnati in complicate coreografie (*Fig. 3*).

Pensiamo che si possa poi passare da orbite semplici a orbite complesse sfruttando algoritmi di intelligenza artificiale che, allenati opportunamente, riescano a produrre delle soluzioni che passino molto vicino a tante orbite semplici, creando delle traiettorie sempre più intricate.

Inoltre, stiamo sviluppando metodi di classificazione per valutare la complessità delle orbite, per sapere ad esempio quanto una soluzione minimizza il dispendio di energia. Con l'aggiunta di queste informazioni sarà infatti possibile istruire una rete neurale a individuare orbite sempre più complicate, fornendo quindi forti evidenze della caoticità del sistema.

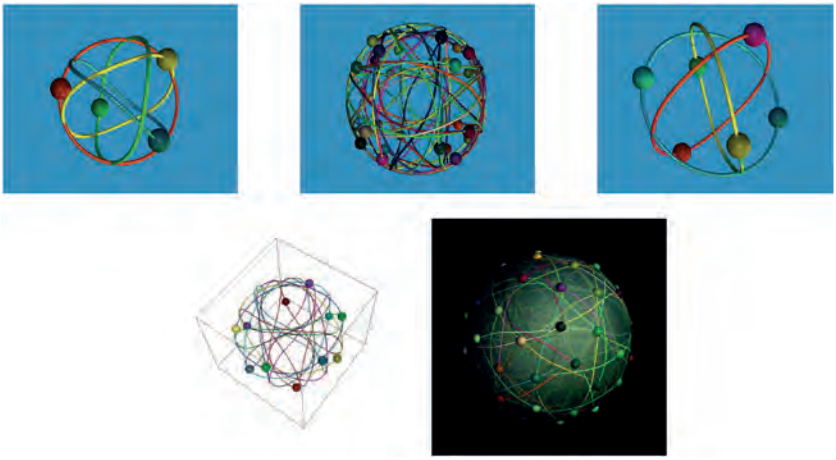

Fig. 3.

Intendiamo eseguire una ricerca computazionale assistita dall'intelligenza artificiale su larga scala per trovare soluzioni complesse di sistemi a N-corpi (e altri sistemi dinamici).

Il nostro obiettivo generale è quello di utilizzare macchine parametriche (una recente generalizzazione della rete neurale artificiale) per generare soluzioni periodiche complesse lavorando nello spazio delle curve e seguendo un approccio variazionale.

Ciò consentirà di scoprire nuove soluzioni periodiche complesse attraverso una combinazione di metodi analitico-funzionali. In questo il nostro approccio si differenzia da altre ricerche svolte nel passato attraverso la soluzione di problemi ai dati iniziali.

L'idea è di addestrare macchine parametriche alla generazione di archi di traiettoria, partendo da un insieme di traiettorie equivarianti (SYMORB) note. Utilizzando la programmazione differenziabile, saremo in grado di indirizzare la macchina verso la scoperta di soluzioni con caratteristiche specifiche (come la periodicità o altre simmetrie) e di ordine crescente di complessità.

Il nostro approccio è modulare e consiste in diverse fasi interconnesse.

- Addestrare macchine parametriche a generare archi di traiettoria, partendo da un set di dati di traiettorie equivarianti (SYMORB).

- Dotare lo spazio delle traiettorie di una struttura algebrica che codifichi la componibilità degli archi di traiettoria. Addestreremo macchine parametriche per generare incollamenti omogenei tra archi di traiettoria. Anche in questo caso, la definizione di una funzione di costo appropriata ci permetterà di valutare la qualità degli incollamenti e di spingere la macchina verso quelli ottimali.

- Esplorare lo spazio risultante di traiettorie complesse e la loro codifica nei *layers* intermedi della macchina parametrica.

Nonostante il suo respiro prevalentemente teorico, la nostra ricerca ammette interessanti applicazioni pratiche. Le orbite complesse che stiamo cercando potrebbero infatti essere utilizzate come transizioni di fase in varie situazioni, ad esempio nel cambio di rotta di un satellite con il minimo consumo di carburante (*transfer orbits*). Il fascino nell'affrontare questo tipo di problemi matematici risiede proprio nell'equilibrio tra la notevole complessità teorica e le svariate applicazioni reali che possono derivare dalla comprensione di fenomeni fisici naturali.

L'ambiente spaziale è modellato da un sistema dinamico complesso ad alta dimensione, affetto da incertezza (*Fig. 4*). È un sistema caotico le cui orbite complesse si possono utilizzare per viaggi spaziali gratuiti o a basso costo, sviluppando e portando all'estremo le idee di Conley della Rete di Trasporto Interplanetario.

Fig. 4.

BIBIOGRAFIA

Baranzini S., Canneori G.M. - Chaotic phenomena for generalised N-centre problems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* (2024), no. 3, Paper No. 39, 55 pp.

Barutello V., Canneori G.M., Terracini S. - Symbolic dynamics for the anisotropic N-centre problem at negative energies. *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* 242 (2021), no. 3, pp. 1749-1834.

Chenciner A., Montgomery R. - A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. *Annals of Mathematics.* (2) 152 (2000), no. 3, pp. 881-901.

Conley, C. C. - Low energy transit orbits in the restricted three-body problem. *SIAM Journal on Applied Mathematics.* 16 (1968), pp. 732-746.

Ferrario D.L., Terracini S. - On the existence of collisionless equivariant minimizers for the classical n-body problem. *Inventiones Mathematicae.* 155 (2004), no. 2, pp. 305-362.

Fusco, G., Gronchi, G. F., Negrini, P. - Platonic polyhedra, topological constraints and periodic solutions of the classical N-body problem. *Inventiones Mathematicae.* 185 (2011), no. 2, pp. 283-332.

[Koon, W. S.; Lo, M. W.; Marsden, J. E.; Ross, S. D. - "Heteroclinic connections between periodic orbits and resonance transitions in celestial mechanics" *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 10 (2000), no. 2, pp. 427-469.

Lagrange, J.L., Serret, P. - Essai sur le Problème des trois Corps. *Oeuvres de Lagrange*. Tome 6, pp. 229-332.

Poincaré H., Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céléste (1892).

Poincaré, H. - Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica.* 13 (1890) no. 1-2.

[Sundman, K.F. - Mémoire sur le problème des trois corps. *Acta Mathematica.* (1913), no. 1, pp. 105-179.